This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06642758 8

VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE PHYSIK.

GEHALTEN AN DER

UNIVERSITÄT KÖNIGSBERG

VON

FRANZ NEUMANN,

DOKTOR DER PHILOSOPHIE UND MEDICIN, PROFESSOR DER PHYSIK UND MINERALOGIE, WIRKLICHES MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN, EHRENMITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN, KORRESPONDIERENDES MITGLIED DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU PETERSBURG, LONDON, PARIS, BOLOGNA, ROM, MÜNCHEN, GÖTTINGEN, MITGLIED DES NATURFORSCHENDEN VEREINS ZU HALLE, MITGLIED DER GELEHRTEN GESELLSCHAFT ZU FRANKFURT A. M., EHRENMITGLIED DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT ZU KÖNIGSBERG I. PR., RITTER DES ORDENS POUR LE MÉRITE, RITTER DES MAXIMILIAN-ORDENS, RITTER DES PREUSSISCHEN KRONEN-ORDENS MIT STERN, RITTER DES ROTHEN ADLER-ORDENS ZWEITER KLASSE MIT EICHENLAUB.

HERAUSGEGEBEN VON SEINEN SCHÜLERN.

IN ZWANGLOSEN HEFTEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

VORLESUNGEN

ÜBER

ELEKTRISCHE STRÖME.

GEHALTEN AN DER UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG

VON

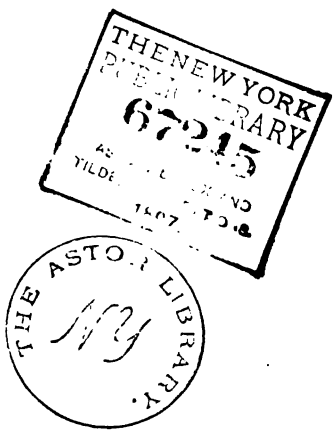
Dr. FRANZ NEUMANN,
PROFESSOR DER PHYSIK UND MINERALOGIE.

HERAUSGEGEBEN VON

Dr. K. VONDERMÜHLL,
AUSSERORDENTL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU LEIPZIG.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1884.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
67215
THE ASTOR LIBRARY

Vorwort des Herausgebers.

Mit Erlaubniss meines hochverehrten Lehrers veröffentliche ich hier die Vorlesungen über elektrische Ströme, welche im Winter 1864/5 sind gehalten worden. Dabei habe ich mich ausschliesslich an meine eigene Nachschrift und Ausarbeitung gehalten; wie jede Abänderung, so sind auch weitere Ausführungen einzelner Punkte grundsätzlich vermieden worden. Nur auf den paar letzten Seiten habe ich geglaubt eine kürzere Andeutung etwas weiter entwickeln zu sollen; es wurden in der Vorlesung, wie ich aus meiner Nachschrift ersehe, die beiden Momente, welche nach Weber an einer Gleitstelle des inducirenden Stromes in Betracht zu ziehen sind, deutlich hervorgehoben; aber aus Mangel an Zeit konnte die Rechnung nicht mehr durchgeführt werden.

In diesen Vorlesungen wird die Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen mit Besprechung der Umstände eingeleitet, unter denen elektrische Ströme entstehen; der Begriff der Spannung wird eingeführt, und die Ohmschen Gesetze entwickelt. Es folgt eine Uebersicht über die wichtigsten Methoden zur Messung der Stromstärke; dabei müssen die Haupteigenschaften eines Magnets betrachtet und die magnetischen Fernewirkungen berechnet werden. Nachdem sodann auch der Widerstand erörtert worden, können die von Ohm angestellten theoretischen Betrachtungen dargelegt werden; aus denselben ergeben sich die Gesetze der Stromtheilung. Den Abschluss dieser einleitenden Betrachtungen bildet das zweite Kapitel, in welchem die hauptsächlichsten Methoden zur Bestimmung der Constanten besprochen werden, namentlich der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes, dann auch der Polarisation und des Uebergangswiderstandes.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich eingehend mit den Ampèreschen Gesetzen. Zunächst wird die Wirkung abgeleitet, welche zwei Stromelemente auf einander ausüben, und dann die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement berechnet; ist aber die Wirkung auf einen gleichfalls geschlossenen Strom zu bestimmen, so existirt ein Potential. Dies wird für die Theorie des Rheometers gleich verwerthet. Ferner können die Wirkungen geschlossener Ströme mittelst Determinanten einfach dargestellt werden. Endlich führt die

Betrachtung von unendlich kleinen geschlossenen Strömen und von Solenoiden zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus.

In den beiden folgenden Abschnitten werden auf Grund dieser Theorie zwei sehr wichtige Aufgaben behandelt. Einmal wird gezeigt wie jeder Magnet in Betreff seiner Wirkungen nach Aussen durch ein System von geschlossenen Strömen zu ersetzen ist. Dann wird ein System von Kreisströmen so aufgestellt, dass die elektrodynamische Wirkung im Innern einer Kugel constant ist, und die Lösung dieser Aufgabe liefert eine ganz allgemeine Theorie der Tangentenboussole.

Das sechste und das siebente Kapitel geben die allgemeinen Principien für die stationäre Strömung der Elektricität im Raum und in der Ebene.

Im letzten Abschnitt werden die inducirten Ströme behandelt. Nach einer kurzen Uebersicht über die Mittel, in einem linearen geschlossenen Leiter einen Strom zu induciren, wird aus einigen einfachen Sätzen, welche die Resultate der Beobachtung zusammenfassen, das allgemeine Princip der Induction abgeleitet; dieses Princip bestimmt den Integralstrom durch die Aenderung, welche das Potential des inducirenden Stromes auf den Leiter erfährt. Den Schluss bilde die Betrachtung des von Wilhelm Weber aufgestellten allgemeinen elektrischen Grundgesetzes; aus demselben folgt sehr einfach das Ampèresche Gesetz für die Wirkung zwischen zwei Stromelementen, aber auch das Princip der Induction, wenn die wirklich in Bewegung versetzten elektrischen Massen der Rechnung zu Grunde gelegt werden.

Leipzig, im Juli 1883.

Karl VonderMühll.

Inhaltsverzeichniss.

§. Seite

Einleitende Bemerkungen 1

I. Kapitel. Die Ohmschen Gesetze.

1. Erster Theil der Ohmschen Gesetze. — Entstehung von elektrischen Strömen und Richtung derselben 3
2. Der Voltasche Fundamentalversuch; elektrische Spannung, Spannungsgesetz, Spannungsreihe, Spannungszahlen 4
3. Die Hydroströme 7
4. Entstehung von Thermoströmen. Die thermoelektrische Reihe der Metalle 9
5. Ueber verschiedene Methoden zur Messung der Stromstärke 13
6. Eigenschaften eines Magnetes. Magnetische Hauptrichtung und magnetische Axe; Bestimmung der letzteren 14
7. Messung der Stromstärke durch Beobachtung der Ablenkung einer Magnetnadel 16
8. Fechnersche Methode zur Messung der Stromstärke mittelst Beobachtung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel 20
9. Die Tangentenboussole 25
10. Wirkung der erdmagnetischen Kraft auf einen beweglichen Kreisstrom, dessen Ebene im Meridian liegt 29
11. Ablenkung eines Kreisstroms aus dem Meridian durch die erdmagnetische Kraft 33
12. Combination mit der Tangentenboussole zur absoluten Bestimmung von j und H 34
13. Astatische Nadel; Sinusboussole 36
14. Zweiter Theil der Ohmschen Gesetze für unverzweigte Ströme. — Ableitung aus der Beobachtung 38
15. Anwendung auf eine Thermokette; Bestimmung der thermoelektrischen Spannungszahlen 41
16. Bestimmung des relativen Widerstandes 43
17. Ableitung der Ohmschen Gesetze aus theoretischen Betrachtungen 45
18. Anwendung der Formel auf eine aus drei Elementen bestehende Kette. Zwei Sätze zur Bestimmung der Constanten 49
19. Directer experimenteller Beweis der OhmschenGesetze durch Kohlrausch 51
20. Die Gesetze der Stromtheilung 54
21. Anwendung von den Gesetzen der Stromtheilung. Methode von Becquerel zur Berichtigung des Multiplicators 57

§. Seite
22. Der Differentialmultiplicator. Neumanns Methode zur Berichtigung desselben 59
23. Ueber die beste Anordnung der Elemente zu einer Kette 63

II. Kapitel. Ueber die Bestimmung der Constanten.

24. Uebersicht der Thatsachen. Unterschied zwischen Thermo- und Hydroströmen. Elektromotorische Kraft. Widerstand derFlüssigkeit. Uebergangswiderstand und Polarisation 66
25. Constante Ketten. Nachweis des Polarisationsstromes 71
26. Der Rheostat 73
27. Vier Methoden zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft 74
28. Poggendorffs Methode zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft. Bestätigung des Voltaschen Spannungsgesetzes für Metalle 77
29. Wheatstones Methode zur Bestimmung des Widerstandes der Schliessung 79
30. Wesentlicher Widerstand; zwei Methoden von Wheatstone zur Bestimmung desselben 81
31. Widerstand gegebener Drahtstücke 83
32. Neumanns Methode zur Bestimmung der Polarisation und des Uebergangswiderstandes 85

III. Kapitel. Die Ampèreschen Gesetze.

33. Die vier Ampèreschen Fundamentalsätze 91
34. Gesetz für die Wirkung zwischen zwei Stromelementen 95
35. Bestimmung der Constanten *k*. Verschiedene Formen des Elementargesetzes 98
36. Gesetz für die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement 102
37. Fall einer fortdauernden Rotation 104
38. Betrachtung der Elementarwirkung in dem Fall, wo das wirkende Element einem geschlossenen Strom angehört 107
39. Wirkung zwischen zwei Elementen, welche beide geschlossenen Strömen angehören; diese Wirkung wird durch ein Potential bestimmt . . 109
40. Anwendung auf die Theorie des Rheometers 112
41. Allgemeine Eigenschaften der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement: Determinanten und Directrix 120
42. Anwendung auf den Fall unbegrenzt fortdauernder Rotation 122
43. Ersetzung eines endlichen geschlossenen Stromes durch unendlich viele unendlich kleine Ströme. Determinanten eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes; geometrische Construction für die Richtung seiner Directrix 124
44. Dieselbe Construction giebt die Richtung der Kraft, welche ein magnetisches Molecül auf eine magnetische Masse ausübt 128
45. Darstellung der Determinanten als Differentialquotienten einer Function 129
46. Componenten der Wirkung, welche ein unendlich kleiner geschlossener Strom auf einen andern unendlich kleinen geschlossenen Strom ausübt 130
47. Neuer Ausdruck für die Wirkung eines endlichen geschlossenen Stromes auf ein Stromelement 132
48. Wirkung eines endlichen geschlossenen Stromes auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom 136
49. Wirkung eines Solenoids auf ein Stromelement 138
50. Ersetzung eines Magnets durch ein Solenoid. Ampères Theorie des Magnetismus 140

§. Seite
51. Wirkung zweier Solenoide auf einander 142
52. Bestimmung der zu Grunde gelegten Einheit in der Biot-Savartschen Formel 143
53. Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Solenoid und Bestimmung des Angriffspunktes 150
54. Anwendung auf die Berechnung der Wirkung, welche der Erdmagnet auf ein Solenoid ausübt 154
55. Ampères Satz über die Ersetzung eines geschlossenen Stromes durch eine magnetische Doppelfläche 155
56. Ableitung des Satzes durch Umformung des Doppelintegrals 157
57. Anwendung zur Berechnung der Wirkung, welche ein Spiralstrom auf einen Solenoidpol ausübt 160
58. Neue Form für die Componenten der Wirkung zwischen zwei geschlossenen Strömen 163
59. Einfacher Ausdruck für das Potential eines geschlossenen Stromes auf einen Solenoidpol 164

IV. Kapitel. Ueber die Ersetzung eines Magnets durch elektrische Ströme.

60. Allgemeiner Ausdruck für die Wirkung eines Magnets auf einen Solenoidpol 166
61. Fall, wo die magnetischen Momente nach den drei Axen bloss Functionen der betreffenden Ordinate sind 168
62. Behandlung des allgemeinen Falls 171
63. Allgemeine Folgerungen. Ersetzung eines elektrodynamischen Zustandes durch einen magnetischen 179
64. Anwendung auf den Fall eines Rotationsellipsoids 180

V. Kapitel. Ueber die Herstellung eines Raumes von constanter elektrodynamischer Kraft.

65. Die Aufgabe und ihre praktische Bedeutung 183
66. Potential eines Kreisstromes 184
67. Die Potentiale einer einfachen Rolle und eines Rollenpaares 186
68. Ueber die Convergenz der erhaltenen Reihe 190
69. Umformung der für die Potentiale gefundenen Ausdrücke 193
70. Anwendung auf die Theorie der Tangentenboussole 194
71. Potential einer Rolle, welche aus mehreren über einander liegenden Drahtschichten besteht 198
72. Passende Aufstellung von zwei Rollenpaaren. Lösung durch verschiedene Halbmesser der Rollen 201
73. Lösung durch Stromverzweigung bei gleichen Halbmessern 203
74. Anwendung von zwei Paaren geschichteter Rollen 205
75. Fortschaffung dreier Glieder durch Anwendung von zwei Paaren einfacher Rollen 207
76. Dasselbe bei Anwendung geschichteter Rollen 209
77. Behandlung des allgemeinen Falls: Durch Anwendung von n Rollenpaaren werden $(2n-1)$ Glieder fortgeschafft 210
78. Auflösung der Gleichungen, welche die Lage der Rollen bestimmen . 211
79. Bestimmung der Coefficienten A; Berechnung der Stromstärken für den Fall von einfachen und von geschichteten Rollen 214
80. Das Potential des Systemes für einen äussern Punkt 215

§. Seite

VI. Kapitel. Ueber die Strömung der Elektricität im Raum.

81. Allgemeine Gleichung für die stationäre Strömung im Raum 220
82. Bedingungen an der Oberfläche; Grenzgleichungen 223
83. Betrachtung des Falles, wo der leitende Raum unbegrenzt ist 225
84. Fall einer leitenden Kugel 228
85. Einführung der charakteristischen Function 229
86. Allgemeine Lösung des Problems 232
87. Direkte Ableitung des Ausdrucks für den Widerstand 233
88. Bestimmung der charakteristischen Function für die Kugel 235
89. Die Bedeutung der Ausdrücke $\Omega_{\alpha,\alpha}$, $\Omega_{\beta,\beta}$ 237
90. Bestimmung der Leitungsfähigkeit der Erde 240

VII. Kapitel. Ueber die Strömung der Elektricität in einer Ebene.

91. Allgemeine Gleichungen für die stationäre Strömung in einer Ebene . 245
92. Direkte Ableitung der Gleichungen 247
93. Allgemeine Lösung; charakteristische Function der Platte 248
94. Anwendung auf den besondern Fall 252
95. Fall der Kreisscheibe; charakteristische Function derselben 252

VIII. Kapitel. Die inducirten Ströme.

A. Uebersicht über die Erscheinungen der inducirten Ströme.

96. Die Erscheinungen der Elektroinduction 257
97. Die Erscheinungen der Magnetoinduction 263

B. Theorie der inducirten Ströme.

98. Fünf allgemeine Sätze als Resultate der Erfahrung 267
99. Ableitung des Ausdrucks für die inducirte elektromotorische Kraft . . 269
100. Einheit des Widerstandes. Allgemeine Bezeichnung; die Hauptfälle . 271
101. Der Inducent bleibt in Ruhe; der Leiter wird bewegt 273
102. Umformung des dreifachen Integrales in die Summe von sechs Doppelintegralen 275
103. Betrachtung des Falles, wo der ganze Leiter bewegt wird 276
104. Bewegung des Leiters mit Gleitstellen 278
105. Fall eines verzweigten Leiters 285
106. Der inducirende Strom ist verzweigt 287
107. Der Inducent ist in Bewegung, während der Leiter ruht 289
108. Die Leiterlemente und die Stromelemente sind gleichzeitig in Bewegung 290
109. Induction durch Intensitätsänderung 293
110. Bemerkung über den Extracurrent 294

C. Webers allgemeines elektrisches Grundgesetz.

111. Ableitung des Ampèreschen Gesetzes aus dem Weberschen Grundgesetz 295
112. Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem Weberschen Grundgesetz . . 299
113. Untersuchung der Uebereinstimmung mit dem früher gefundenen Potentialsatz 301
114. Ergebniss der Beobachtung 303
115. Betrachtung einer Gleitstelle des Inducenten 305

Einleitende Bemerkungen.

In den folgenden Vorträgen soll eine Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen entwickelt werden, d. h. der Wirkungen, welche die Elektricität ausübt, wenn sie in Bewegung begriffen ist, im Gegensatz zu den elektrostatischen Erscheinungen, wo die Elektricität immer als im Zustand der Ruhe befindlich angenommen wird.

Ein Theil der elektrodynamischen Erscheinungen ist von Oersted im Jahre 1820 entdeckt worden, nämlich die Wirkung der strömenden Elektricität auf einen Magnet. Einen weiteren Theil fand bald darauf Ampère, die Wirkung eines elektrischen Stromes auf einen andern Strom. Dieser gab zugleich die Gesetze der Wirkungen, eine vollständige mathematische Theorie der Erscheinungen, und die Entwicklung derselben führte ihn zu einer sehr wichtigen allgemeinen Folgerung: „Alle magnetische Wirkung kann durch elektrische ersetzt werden", eine Folgerung, welche nicht nur die Hypothese von besondern magnetischen Flüssigkeiten überflüssig macht, sondern auch eine Erklärung der Wirkungen giebt, die ein elektrischer Strom auf einen Magnet ausübt.

Wir werden zunächst bloss sogenannte lineare Ströme betrachten, nämlich Ströme in solchen Leitern, wo zwei Dimensionen gegen die dritte sehr klein sind; wir werden dann die Betrachtungen auf Flächen und auf drei Dimensionen ausdehnen; die Möglichkeit dieser Erweiterung beruht auf den theoretischen Ohmschen Vorstellungen.

Hieran wird sich die Theorie der inducirten Ströme reihen, d. h. solcher Ströme, die in einem System von Leitern, durch welche Elektricität strömt, hervorgerufen werden, wenn ein Theil der Leiter seine Lage ändert, oder wenn eine Aenderung in der Intensität der vorhandenen elektrischen Strömung stattfindet. Der Entdecker dieser Erscheinungen ist Faraday. Durch weiteres Studium derselben gelangte Wilhelm Weber zu einem sehr allgemeinen mechanischen Gesetze der elektrischen Fernewirkungen, zu dem sogenannten Weberschen elektrischen Grundgesetz. Dieses Gesetz umfasst die

sämmtlichen Fernewirkungen der Elektricität, die der strömenden sowohl, wie die der ruhenden; es folgen daraus die Ampèreschen Gesetze und die Gesetze der inducirten Ströme. Erst dadurch hat die Elektrodynamik ein sicheres Fundament gewonnen; das Gesetz leistet in seiner Sphäre ganz dasselbe, was das Newtonsche Gravitationsgesetz. Wir sind damit gewiss nicht auf der letzten Stufe unsrer Erkenntniss angelangt; es bedarf noch einer Erklärung des Gravitationsgesetzes und des Weberschen Grundgesetzes; aber dadurch kann das auf diese Gesetze gegründete Gebäude keine Aenderung erleiden.

Manche ältere Vorstellung ist durch das Webersche Gesetz berichtigt oder modificirt worden; namentlich gilt das von der elektrischen Spannung. Wir werden jedoch, um von dem historischen Gange nicht abzuweichen, die betreffenden Erklärungen erst im Anschluss an die Theorie der inducirten Ströme geben und vorher die älteren Vorstellungen auseinandersetzen; der Gebrauch ist derselbe, wenn schon der Inhalt ein anderer wird.

Wir geben als Einleitung eine summarische Uebersicht der Umstände, unter welchen Ströme entstehen, dann die allgemeinen Gesetze, von welchen ihre Stärke abhängt, die Grundbegriffe und die Grundsätze, worauf die elektrischen Apparate beruhen, die Methoden zur Bestimmung ihrer Constanten, also eine Theorie der Messinstrumente.

I. Kapitel.

Die Ohmschen Gesetze.

§ 1.

Erster Theil der Ohmschen Gesetze. — Entstehung von elektrischen Strömen und Richtung derselben.

G. S. Ohm hat das grosse Verdienst aus genauen Beobachtungen die Gesetze der Stromstärke abgeleitet und damit einen sichern Grund für die folgenden theoretischen Untersuchungen gelegt zu haben. Die Resultate sind niedergelegt in der kleinen Schrift: „Die galvanische Kette", 1827.*) Ohne Zweifel hat die Einkleidung derselben in eine mathematische Formel die schnelle Verbreitung der so wichtigen Entdeckung gehindert; man war noch zu wenig gewohnt die Richtigkeit theoretischer Folgerungen durch genaue messende Beobachtungen bewiesen zu sehen. Die Anerkennung blieb lange aus; erst durch das klassische Werk von Fechner: „Massbestimmungen über die galvanische Kette",**) 1831, haben die Ohmschen Gesetze eine weitere Verbreitung gefunden. Ohm hat die Beweise seiner Sätze experimentell mittelst Thermoströmen geführt, Fechner mittelst Hydroströmen; dieser musste grosse Schwierigkeiten überwinden, da zu jener Zeit noch keine constanten Hydroketten gefunden waren.

Werden zwei Metalle, z. B. Wismuth und Kupfer, zu einem Bogen verbunden, so hat man eine sogenannte Thermokette; es entsteht darin ein Strom, wenn die eine Löthstelle erwärmt wird. Die Entstehung eines Stromes wird am sichersten beobachtet an der Ablenkung einer Magnetnadel; stellen wir den Bogen, wie die Figur 1 zeigt, im Meridian auf, und in der Mitte des Bogens eine Magnetnadel, so wird bei Erwärmung der untern Löthstelle der Nordpol der Nadel nach

*) Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet von Dr. G. S. Ohm. Berlin, 1827.

**) G. Th. Fechner, Massbestimmungen über die galvanische Kette. Leipzig, 1831.

Osten abgelenkt; stellen wir dagegen die Nadel über dem Bogen auf, so wird bei Erwärmung der untern Löthstelle ihr Nordpol nach Westen abgelenkt; in dem letztern Falle ist jedoch die Ablenkung schwächer.

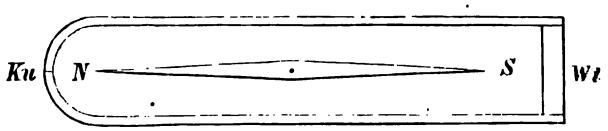


Fig. 1.

Aus der Art der Ablenkung kann auf die Richtung des Stromes geschlossen werden; unter dieser Richtung verstehen wir diejenige, in welcher die positive Elektricität strömt, und nehmen an, dass ebensoviel negative Elektricität in der entgegengesetzten Richtung fliesse. Ampère hat die folgende Regel zur Bestimmung der Stromrichtung gegeben: „Man denke sich eine menschliche Figur mit dem Strome schwimmend, das Gesicht nach der Magnetnadel gerichtet: dann wird der Nordpol der Nadel immer nach ihrer linken Seite abgelenkt.“ Demnach geht in unserm Falle der Strom von der warmen Löthstelle durch das Kupfer zur kalten und von dieser durch das Wismuth zur warmen zurück.

Der Beweis dieser Regel wird durch die Hydrokette geführt. Wir denken uns zwei Metalle, z. B. Kupfer und Zink, zu einem Bogen verbunden, welcher nicht in sich selbst geschlossen ist; vielmehr wird die Schliessung durch eine Flüssigkeit bewerkstelligt, durch Wasser, besser durch angesäuertes Wasser oder durch eine Salzlösung. Stellen wir den Versuch mit Kupfer und Zink an, so geht nach der Ampèreschen Regel der Strom vom Zink durch die Flüssigkeit zum Kupfer. Es handelt sich also darum die Gründe anzugeben, woraus wir schliessen, dass in einer Hydrokette der Strom die genannte Richtung habe.

§. 2.

Der Voltasche Fundamentalversuch; elektrische Spannung, Spannungsgesetz, Spannungsreihe, Spannungszahlen.

Sie beruhen auf dem Voltaschen Fundamentalversuch. Bringt man zwei Metalle, z. B. Zink und Kupfer, mit einander in Berührung, ohne dass eine leitende Verbindung zum Erdboden stattfindet, so wird das eine Metall positiv, das andere negativ elektrisch, z. B. Zink positiv und Kupfer negativ; es ist das eine am Elektroskop beobachtete Thatsache. Volta hat zuerst den Satz aufgestellt, dass an der Berührungsstelle so lange eine Zerlegung der neutralen Elektricität stattfinde, bis der Unterschied der elektrischen Spannung einen bestimmten Werth erhalte. Bezeichnen wir die Spannungen in den beiden Metallen mit x und y, so ist demnach

$$x - y = \alpha;$$

der Spannungsunterschied α ist für die beiden Metalle constant.

Sind beide Metalle isolirt, so muss in jedem gleich viel freie Elektricität vorhanden sein, in dem einen positive, in dem andern negative; wir haben also:

$$x + y = 0, \qquad x - y = \alpha;$$

folglich

$$x = \frac{\alpha}{2}, \qquad y = -\frac{\alpha}{2}.$$

Ist dagegen das eine Metall leitend mit dem Erdboden verbunden, so kann es keine freie Elektricität enthalten; wir haben dann etwa

$$y = 0, \qquad x - y = \alpha;$$

folglich

$$x = \alpha, \qquad y = 0.$$

Wir können auch, wenn die beiden Metalle isolirt sind, uns noch eine bestimmte Menge freier Elektricität hinzugefügt denken; dann ist

$$x + y = E, \qquad x - y = \alpha;$$

folglich

$$x = \frac{1}{2}(E + \alpha), \qquad y = \frac{1}{2}(E - \alpha).$$

Die Spannungsdifferenz α ist zugleich das Maass der sogenannten elektromotorischen Kraft an der Berührungsfläche; es wird nämlich nach Volta an der Berührungsfläche zweier Metalle erstens so lange Elektricität zerlegt, bis ein bestimmter Spannungsunterschied stattfindet, und zweitens wird dieser Unterschied immerfort erhalten. Werden also die geschiedenen freien Elektricitäten nach beiden Seiten abgeleitet, so findet in der Grenzfläche fortgesetzt Scheidung neutraler Elektricität statt.

Ein ferneres Resultat des Voltaschen Fundamentalversuchs ist die Voltasche Spannungsreihe: man kann die sämmtlichen Metalle in eine Reihe ordnen, derart dass jedes Metall sich positiv verhält gegen jedes unter ihm stehende, negativ gegen jedes über ihm stehende. Diese Reihe ist etwa die folgende:

\+
Zinkamalgam
Zink
Blei
Zinn
Eisen
Kupfer
Silber
Gold
Platin
Kohle
—

Drittens fand Volta ein bestimmtes Gesetz, das Spannungsgesetz. Denken wir uns die Spannungsreihe der Metalle hingeschrie-

ben, so ist der Spannungsunterschied zwischen zwei beliebigen derselben gleich der Summe der Spannungsunterschiede aller zwischenliegenden. Es sei die Spannungsreihe:

$$A$$
$$B$$
$$C$$
$$D$$
$$E$$
$$\ldots;$$

ferner bezeichnen (A, B) den Spannungsunterschied zwischen A und B, u. s. f. Dann ist nach dem Obigen:

$$(A, C) = (A, B) + (B, C), \quad \text{u. s. w.}$$

Volta suchte dieses Gesetz experimentell durch direkte elektroskopische Messungen zu beweisen; doch sind die Werthe der beobachteten Grössen so klein, dass seine Beobachtungen kaum beweisend sein können. Hingegen hat er einen scharfen indirekten Beweis gegeben; wenn das Gesetz nicht stattfände, so müssten in jedem aus verschiedenen Metallen zusammengesetzten Bogen elektrische Strömungen entstehen. Es seien A, B, C drei verschiedene Metalle; in γ finde vorerst keine leitende Verbindung statt; die entsprechenden Spannungen seien x, y, z und z'. Wir berechnen den Unterschied von z und z'. Es ist

$$x - z = (A, C),$$
$$y - x = (B, A),$$
$$z' - y = (C, B);$$

folglich

$$z' - z = (A, C) + (B, A) + (C, B).$$

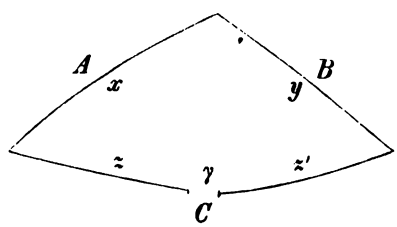


Fig. 2.

Da aber

$$(B, A) = -(A, B),$$
$$(C, B) = -(B, C),$$

folgt schliesslich

$$z' - z = (A, C) - \{(A, B) + (B, C)\}.$$

Werden nun in γ die beiden Enden leitend verbunden, und haben die Spannungen z und z' verschiedene Werthe, so findet in dem Augenblick, wo die Verbindung hergestellt wird, ein Sturz von Elektricität statt; denn die beiden verschiedenen Spannungen gleichen sich aus. Sofort wird aber in den Berührungsstellen neue Elektricität geschieden, um den Spannungsunterschied aufrecht zu erhalten, und es muss daher eine fortdauernde elektrische Strömung entstehen. Die Erfahrung zeigt, dass dies nicht der Fall ist; folglich müssen z' und z gleich sein, d. h.

$$(A, C) = (A, B) + (B, C),$$

wenn A, B, C drei beliebige Metalle bezeichnen. Dieselbe Betrachtung kann sofort auf beliebig viele Metalle ausgedehnt werden.

Erst in neuerer Zeit ist wieder versucht worden, das Voltasche Spannungsgesetz durch direkte elektroskopische Beobachtungen mit genügender Schärfe nachzuweisen, und zwar von Kohlrausch*). Die Epoche machenden Messungen wurden mit Condensator und Elektrometer angestellt; einige der gefundenen Zahlen sind die folgenden:

(Zink, Platin)	107	
(Zink, Gold)	112,7	
(Zink, Silber)	105,6	
(Zink, Eisen)	74,7	
(Eisen, Platin)	32,3	32,3
(Eisen, Gold)	39,7	38
(Eisen, Silber)	29,8	30,9.

Die in der dritten Verticalreihe angegebenen Zahlen folgen nach dem Voltaschen Gesetz aus denen der zweiten; die Uebereinstimmung ist genügend in Anbetracht der grossen Schwierigkeiten, mit denen die Messungen zu kämpfen haben. Es finden fortwährend nicht zu vermeidende Aenderungen an den Oberflächen der Metalle statt; mit Blei gelangen die Versuche gar nicht; aber die Oberfläche änderte sich da auch deutlich von Stunde zu Stunde; ebenso stimmten beim Kupfer die verschiedenen Messungen wenig überein.

Aus den obigen Werthen lässt sich eine andere Reihe von Zahlen ableiten, die der sogenannten Spannungszahlen. Man giebt einem bestimmten Metall eine gewisse Zahl, gewöhnlich Zink die Zahl 100, und bestimmt dann die Zahl für jedes andere Metall so, dass der Unterschied gleich dem Spannungsunterschied ist. Es folgt so:

Zink	100
Eisen	25,3
Silber	— 5,6
Platin	— 7
Gold	— 12,7.

§. 3.

Die Hydroströme.

Wir betrachten noch einmal die Spannungen in einem geschlossenen Leitersystem und nehmen vier metallische Leiter an: A, B, C, D; mit den Buchstaben seien auch gleich die Spannungszahlen bezeichnet. Vorläufig sei D durch eine Oeffnung bei γ in zwei Theile getheilt; die Spannungen seien x, y, z, u, u'. Wir haben dann:

*) Kohlrausch, Pogg. Ann. 72, 75, 78, 82.

$$x - u = (A, D),$$
$$y - x = (B, A),$$
$$z - y = (C, B),$$
$$u' - z = (D, C),$$

folglich

$$u' - u = (A, D) + (B, A) + (C, B) + (D, C).$$

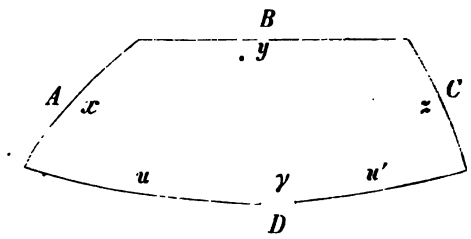


Fig. 3.

An der Stelle γ ist also der Spannungsunterschied gleich der Summe der Spannungsunterschiede an den sämmtlichen Berührungsstellen. Findet nun in γ leitende Verbindung statt, so entsteht ein elektrischer Strom, und die Strömung ist proportional dem Spannungsunterschied an der Stelle γ, also proportional der Summe von den Spannungsunterschieden der sämmtlichen Berührungsstellen.

Wenn aber, wie wir bisher angenommen haben, die vier Leiter Metalle sind, so gilt das Voltasche Gesetz; die Summe ist immer gleich null,

$$u' - u = 0,$$

und wir erhalten keinen Strom. Man nennt solche Leiter, welche mit Ausnahme der Metalllegirungen sämmtlich chemisch einfache Körper sind, auch Leiter erster Klasse.

Nun sei aber einer unter den vier Leitern ein Leiter zweiter Klasse. Zu diesen gehören im Allgemeinen chemisch zusammengesetzte Stoffe, namentlich Flüssigkeiten, überhaupt alle diejenigen Stoffe, welche durch den galvanischen Strom zersetzt, in verschiedene Bestandtheile zerlegt werden. Es sei C ein solcher Leiter zweiter Klasse. Wir schreiben dann die Formel:

$$u' - u = A - D + B - A + (C, B) + (D, C),$$

indem wir vorläufig die Symbole (C, B), (D, C) beibehalten, da die Leiter zweiter Klasse dem Voltaschen Spannungsgesetze nicht folgen. Volta hatte angenommen, es sei der Spannungsunterschied zwischen einem Leiter erster Klasse und einem Leiter zweiter Klasse geradezu null; nach spätern genauen Untersuchungen dagegen ist ein Unterschied auch hier vorhanden, aber sein Werth so klein, dass er im Vergleich mit den Spannungsunterschieden zwischen Leitern erster Klasse kann vernachlässigt werden, wenn man sich mit einem angenähert richtigen Resultat begnügen will. Wir setzen daher vorläufig solche Spannungsunterschiede null.

Thun wir das in der obigen Formel, so werden (C, B) und (D, C) null, und es entsteht:

$$u' - u = B - D;$$

der Spannungsunterschied in einem beliebigen Punkte ist also bloss abhängig von den Metallen, welche mit dem Leiter zweiter Klasse in Berührung stehen; das Metall ist ganz gleichgiltig. Statt des einen Metalles hätten wir eine beliebige Anzahl verschiedener Metalle einschalten können ohne den Werth der Spannung zu ändern; die Natur der metallischen Schliessung ist gleichgiltig.

Wir wenden dieses Resultat auf eine Zinkkupferkette an. An der Stelle γ findet der Spannungsunterschied $u' - u$ statt, und es ist

$$u' - u = Z - K$$

eine positive Grösse: folglich strömt beständig positive Elektricität von γ durch das Zink zur Flüssigkeit, durch diese hindurch zum Kupfer; der Strom hat also die oben bei Besprechung der Ampèreschen Regel angenommene Richtung. Nach dem, was wir gesehen haben, kommt bloss der Spannungsunterschied zwischen den beiden Enden in Betracht, welche mit der Flüssigkeit in Berührung stehen; der Strom wird also bedingt durch die Beschaffenheit der beiden sogenannten Polplatten.

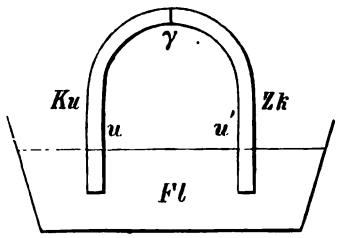


Fig. 4.

§. 4.

Entstehung von Thermoströmen. Die thermoelektrische Reihe der Metalle.

Im Wesentlichen liegt demnach die Ursache des Stromes an den Stellen, wo Metalle mit einer Flüssigkeit in Berührung stehen, und es folgt aus unsrer Betrachtung, dass ein elektrischer Strom entstehen muss, wenn in einem geschlossenen Leiterbogen das Voltasche Spannungsgesetz gestört wird. Solche Störungen können nun im Allgemeinen auf zweierlei Art bewirkt werden, einmal dadurch, dass ein Leiter zweiter Klasse eingeschaltet wird, dann aber auch dadurch, dass die Verbindungsstellen der Metalle auf verschiedene Temperatur gebracht werden. Auf diesem letztern Wege entstehen die sogenannten Thermoströme, welche wir jetzt etwas näher betrachten wollen.

Wir haben uns im Allgemeinen die Spannungszahlen als Functionen der Temperatur zu denken. Nehmen wir einen aus zwei Metallen erster Klasse zusammengesetzten Bogen, und bringen wir die Löthstellen α und β der beiden Metalle A und B auf die Temperaturen t und t'; nennen wir ferner die Spannungen y, u und u', in-

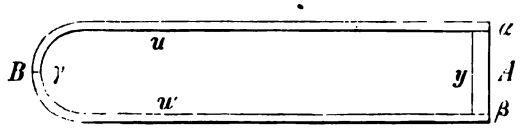


Fig. 5.

dem wir uns wieder in γ die leitende Verbindung aufgehoben denken, so haben wir:

$$y - u = A_t - B_t,$$
$$u' - y = B_{t'} - A_{t'};$$

folglich $$u' - u = A_t - A_{t'} + B_{t'} - B_t.$$

Sind die Spannungszahlen Functionen der Temperatur, so hat $u' - u$ im Allgemeinen einen von null verschiedenen Werth.

Nehmen wir nun an, es seien die Temperaturunterschiede nicht sehr gross, so werden wir die Functionen A und B nach dem Taylorschen Satze entwickeln dürfen, und wenn wir die höhern Glieder vom Quadrate der Temperaturdifferenz $(t' - t)$ an vernachlässigen, so folgt:

$$u' - u = \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t}\right)(t' - t).$$

Der entstehende Thermostrom wird also proportional dem Temperaturunterschied der beiden Löthstellen. Die Erfahrung lehrt, dass dies bei den meisten Metallen der Fall ist, sobald die Temperaturdifferenz 20 bis 30° nicht übersteigt. Bei den praktisch sehr wichtigen Eisen- und Neusilberketten findet diese Proportionalität statt, wenn die beiden Temperaturen zwischen 0 und 100° liegen; die Abweichungen liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Bezeichnen wir die Differentialquotienten der Spannungszahlen mit A' und B', so wird

$$u' - u = (B' - A')(t' - t);$$

wenn wir dann die Metalle nach der Grösse der Differentialquotienten in eine Reihe ordnen, so ersehen wir daraus das thermoelektrische Verhalten der Metalle und können die Richtung und Stärke des Thermostromes bestimmen.

Diese thermoelektrische Reihe fällt mit der Voltaschen Spannungsreihe nicht zusammen. Die Thermoströme sind im Anfang der zwanziger Jahre von F. J. Seebeck*) entdeckt worden; er giebt die folgende Reihe:

Antimon
Eisen
Zink
Silber
Kupfer
Zinn
Neusilber
Wismuth.

*) Seebeck, Pogg. Ann. 6.

A. C. Becquerel*) dagegen hat gefunden:

Eisen	100
Silber	73,8
Zink	73,0
Kupfer	72,8
Platin	63,9.

Wie man sieht, ist die Stellung der Metalle in der Seebeckschen und in der Becquerelschen Reihe etwas verschieden.

Die Unsicherheit in der Bestimmung wird durch viele Umstände bedingt, welche noch wenig aufgeklärt sind. Einmal hat grössere oder geringere chemische Reinheit der Substanzen einen grossen Einfluss; bilden wir einen geschlossenen Bogen bloss aus Eisen, oder bloss aus Antimon, so giebt es immer Stellen, deren Erwärmung einen elektrischen Strom liefert. Bisweilen rührt das von chemischer Unreinheit her, indem heterogene Stücke an einander grenzen; aber auch physikalische Differenzen genügen, wenn z. B. ein gehärtetes und ein weiches Stück desselben Metalles an einander grenzen. Härtet man einen Drahtring durch Torsion und macht dann ein Stück desselben über der Lampe weich, so erhält man durch verschiedene Erwärmung der beiden Stellen, wo die harten und weichen Theile an einander grenzen, einen elektrischen Strom.

Magnus**) hat über diesen Punkt sehr umfassende Versuche angestellt. Der Strom geht durch die erwärmte Berührungsstelle vom weichen zum harten Theile in folgenden Metallen:

Messing, Silber, Kupfer, Platin,

umgekehrt dagegen vom harten zum weichen in

Neusilber, Zink, Zinn, Eisen.

Auch die krystallinische Structur ist von Einfluss; so kommt es auf die Lage der Blätterdurchgänge im Wismuth und im Antimon an, wenn wir dieselben mit thermoelektrisch nahe stehenden Metallen zusammenlöthen, oder wenn wir aus einem Metall allein den Bogen herstellen, aber die Blätterdurchgänge an gewissen Stellen sich kreuzen lassen.

Im Allgemeinen hat die thermoelektrische Reihe nur so lange Giltigkeit, als die Stärke des Stromes der Temperaturdifferenz proportional ist. Hiermit steht im Zusammenhang, dass bei sehr grosser Temperaturdifferenz die Richtung des Stromes in die entgegengesetzte übergehen kann. Dies ist namentlich bei Silber und Zink beobachtet; nach den Messungen von Becquerel ist hier bei einer Temperaturdifferenz von etwa 220° der Strom null, und bei grösserer Differenz

*) Becquerel, Ann. de Chim. et de Phys. T. XLI. 1829. Pogg. Ann. 17.
**) Magnus, Pogg. Ann. 83.

seine Richtung entgegengesetzt, während bei etwa 120° Temperaturdifferenz die Stärke des Stromes ein Maximum ist. Aehnlich verhalten sich Gold und Zink.

Diese Erscheinungen sind aus unserer Grundvorstellung ganz gut erklärbar. Wir wollen die Resultate graphisch darstellen, indem wir die Temperaturdifferenzen $t' - t$ als Abscissen, die Werthe von $A_{t'} - A_t$ als Ordinaten einer Curve abtragen; ebenso construiren wir eine zweite Curve, deren Ordinaten gleich $B_{t'} - B_t$ sind. Es ist dann der Werth von $u' - u$ gleich der Differenz der Ordinaten für die Abscisse $t' - t$. Der oben erwähnte Fall tritt ein, wenn die beiden Curven sich schneiden; in dem Schnittpunkt ist $u' - u$ gleich null, vor und nach dem Schnittpunkt das Vorzeichen von $u' - u$ das entgegengesetzte. Liegt die einem dritten Metall C entsprechende Curve zwischen denen von A und B, so muss die Curve C entweder die Curve A oder die Curve B schneiden.

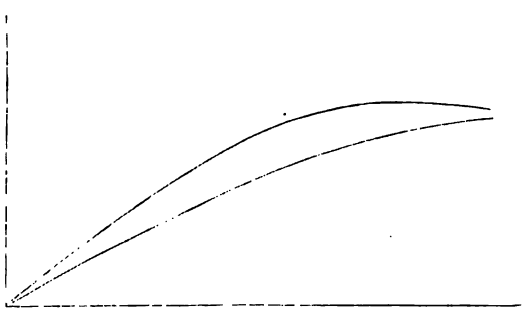


Fig. 6.

Aus dieser Betrachtung folgt aber weiter, dass die Stelle, wo $u' - u$ null wird, nicht nur von der Temperaturdifferenz $t' - t$, sondern auch von dem absoluten Werth der Temperatur t abhängt. Um dies deutlicher zu machen, construiren wir eine Curve mit der Abscisse $t' - t$ und der Ordinate $u' - u$. Diese Curve schneidet die Abscissenaxe in den Punkten t und t', wenn für die Temperaturdifferenz $t' - t$

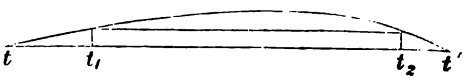


Fig. 7.

$$(A_{t'} - A_t) = (B_{t'} - B_t).$$

Gehen wir nun, statt von der Temperatur t, von der Temperatur t_1 aus, wo $t_1 > t$, so wird für einen Werth t_2, wo $t_2 < t'$,

$$A_{t_2} - A_{t_1} = B_{t_2} - B_{t_1};$$

denn t_2 ist die Abscisse derjenigen Stelle auf der Curve, deren Ordinate denselben Werth besitzt, wie an der Stelle t_1.

Die oben nach Becquerel angegebenen Zahlen sind nicht durch elektroskopische Messungen erhalten, wie sie Kohlrausch an Hydroströmen angestellt hat; sondern Becquerel hat die Stromstärke gemessen. Elektroskopische Messungen an Thermoströmen möchten auch heute noch unmöglich sein, weil diese Ströme im Allgemeinen viel

schwächer sind als die Hydroströme; es müssten Ladungen gemessen werden, welche im günstigsten Falle nur $\frac{1}{200}$ oder $\frac{1}{300}$ von den schon sehr kleinen Werthen hätten, die Kohlrausch bestimmt hat.

Wir können nun allerdings die Ströme verstärken durch Vervielfachung der Stellen, wo das Voltasche Spannungsgesetz aufgehoben ist. Denken wir uns in der durch die Zeichnung angedeuteten Weise Wismuth- und Antimonstäbe zu einer Kette verbunden und die Verbindung zwischen dem letzten Wismuth- und Antimonende durch einen Kupferdraht hergestellt, halten wir ferner die obern Löthstellen auf der Temperatur t, die untern auf der Temperatur t', so haben wir an der Stelle γ:

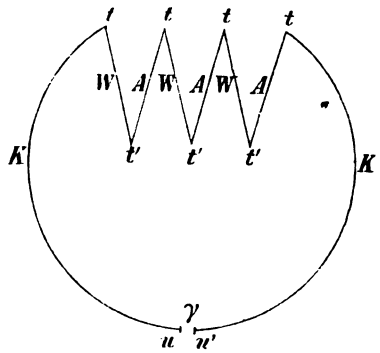


Fig. 8.

$$u' - u = K_t - A_t + 3(A_{t'} - W_{t'}) + 2(W_t - A_t) + W_t - K_t$$

oder

$$u' - u = 3(A_{t'} - W_{t'} - A_t + W_t).$$

Demnach wird die elektromotorische Kraft durch einen solchen Bogen verdreifacht. Man nennt die einzelnen Stücke die Elemente der Kette. In unserm Falle sind deren drei zu der Kette vereinigt.

Die Verstärkung des Stromes findet jedoch ihre Grenze. Es rührt dies daher, dass die Stärke des Stromes noch von andern Umständen abhängt, namentlich von der Art des Weges. Hierauf bezieht sich der zweite Theil des Ohmschen Gesetzes. Der erste Theil lautet:

Die Strömung ist proportional der Summe sämmtlicher elektromotorischer Kräfte.

§. 5.

Ueber verschiedene Methoden zur Messung der Stromstärke.

Bevor wir zu dem zweiten Theile übergehen, wollen wir eine kurze Uebersicht über die Methoden zur Messung der Stromstärke geben, hier nur ganz summarisch, indem wir uns vorbehalten später einige dieser Methoden eingehend zu betrachten.

Man beobachtet erstens die Wirkung eines elektrischen Stromes auf eine Magnetnadel, wobei man immer eine Declinationsnadel anwendet, oder umgekehrt die Wirkung eines Magnetes auf den Strom unter dem Einfluss von andern bekannten Kräften, z. B. Torsionskräften; in der Regel liefert dann der Erdmagnet die magnetische Kraft.

Zweitens beobachtet man auch die Wirkung eines Stromes auf sich selbst, indem man einen Theil desselben beweglich macht;

auf diesem Princip beruhen das Webersche Dynamometer und das Neumannsche Rheometer.

Drittens kann man aus der Erwärmung, welche der Strom in einem bestimmten Drahtstück bewirkt, die Stärke des Stromes berechnen; Hankel in Leipzig hat nach dieser Methode Messungen angestellt.

Endlich kann man auch die chemischen Wirkungen des Stromes zur Messung seiner Stärke benutzen; man beobachtet die Quantität der durch den Strom zersetzten Substanz. Gewöhnlich lässt man den Strom Wasser zersetzen und misst die Menge des entwickelten Wasserstoffs; aber diese Methode kann nur auf starke Ströme angewandt werden.

Wir wollen hier diejenigen Methoden auseinandersetzen, welche die Wirkung des Stromes auf eine Magnetnadel oder die Wirkung eines Magnetes auf den Strom benutzen; zu diesem Ende müssen wir vorerst die Eigenschaften eines Magnetes kennen lernen.

§ 6.

Eigenschaften eines Magnetes. Magnetische Hauptrichtung und magnetische Axe; Bestimmung der letzteren.

Jedes Molecül eines Magnetes ist ein vollständiger Magnet mit positivem und negativem magnetischem Fluidum, indem wir der alten Anschauungsweise folgen; wir werden später eine andere Erklärung geben; aber die Wirkungen bleiben unverändert.

Wir nehmen an, es finde sich an der Stelle x, y, z das freie magnetische Fluidum μ; ferner wirke eine magnetische Kraft, deren Ursprung soweit entfernt sei, dass sie in dem zu betrachtenden Raum überall dieselbe Stärke und Richtung habe, wie z. B. die erdmagnetische Kraft; ihre Componenten seien A, B, C. Dann ist die Wirkung auf das magnetische Fluidum μ bestimmt durch die Componenten

$$A\mu, \quad B\mu, \quad C\mu,$$

und die Gesammtwirkung auf einen magnetischen Körper durch

$$A\Sigma\mu, \quad B\Sigma\mu, \quad C\Sigma\mu,$$

wenn wir die Summe über alle Theilchen von magnetischem Fluidum nehmen, die in dem Körper enthalten sind.

Nun lehrt die Erfahrung, dass jeder Magnet immer gleich viel positives wie negatives Fluidum enthält, dass also

$$\Sigma\mu = 0.$$

Dies wird durch die folgende Beobachtung bewiesen. Ein Messingstab hängt in horizontaler Lage an einem Faden; an dem einen Ende A des Stabes ist eine Magnetnadel mit verticaler Axe, an dem andern B ein Gegengewicht angebracht; demnach ist der Stab um eine verticale Axe durch C drehbar. Sei nun H die Horizontalcomponente der erd-

magnetischen Kraft, α der Winkel, den die Längsaxe des Stabes mit dem magnetischen Meridian bildet. Dann wirkt auf den Stab das Drehungsmoment

$$\overline{AB} \,.\, \sin\alpha \,.\, H \,.\, \Sigma\mu,$$

wo die Summe über alles magnetische Fluidum der Nadel auszudehnen ist. Der Stab wird nie gedreht, während sich die Nadel im magnetischen Meridian einstellt. Folglich ist $\Sigma\mu$ null.

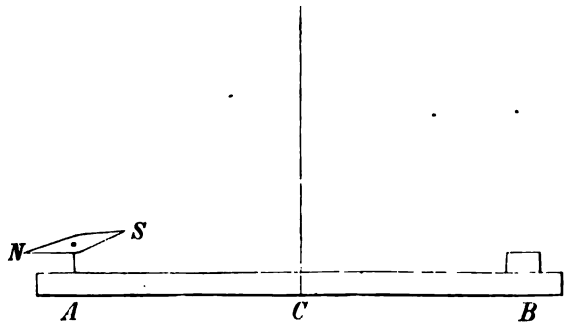


Fig. 9.

Wird ein Magnet um einen Punkt drehbar aufgestellt, und ist dieser Punkt sein Schwerpunkt, so nimmt er unter dem Einfluss der erdmagnetischen Kraft eine bestimmte Gleichgewichtslage an, in welcher die Summe der sämmtlichen Drehungsmomente null sein muss. Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten in den Drehungspunkt und bilden die Ausdrücke für die Drehungsmomente. Da in dem Punkt x, y, z die Kraft $A\mu$, $B\mu$, $C\mu$ wirkt, so werden die Summen der Drehungsmomente um die drei Coordinatenaxen

$$\Sigma(yC\mu - zB\mu)$$
$$\Sigma(zA\mu - xC\mu)$$
$$\Sigma(xB\mu - yA\mu).$$

Damit Gleichgewicht stattfinde, müssen diese drei Summen null sein. Nun sind aber die Grössen A, B, C constant; es kommen daher in den Ausdrücken nur die drei Summen vor:

$$\Sigma x\mu, \quad \Sigma y\mu, \quad \Sigma z\mu.$$

Denken wir uns also ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen Kanten mit den Richtungen der Coordinatenaxen zusammenfallen und an Länge diesen drei Summen gleich sind, so wird die Diagonale die Länge M haben und mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bilden, welche durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$M\cos\alpha = \Sigma x\mu, \quad M\cos\beta = \Sigma y\mu, \quad M\cos\gamma = \Sigma z\mu.$$

Man nennt diese drei Grössen die magnetischen Momente des Magnetes in Bezug auf die drei Coordinatenaxen. Es folgt dann als Bedingung für das Gleichgewicht:

$$C\cos\beta - B\cos\gamma = 0,$$
$$A\cos\gamma - C\cos\alpha = 0,$$
$$B\cos\alpha - A\cos\beta = 0,$$

d. h. die Richtung der Diagonale M muss mit der Richtung der erdmagnetischen Kraft zusammenfallen.

Die Richtung M heisst die Hauptrichtung des Magnets, und wenn sie durch seinen Schwerpunkt geht, seine Axe. Diese Richtung ist völlig bestimmt; denn sie bleibt, weil $\Sigma\mu = 0$ ist, bei einer Verlegung des Anfangspunktes unverändert. Der Werth von M endlich heisst das magnetische Hauptmoment, und das magnetische Moment für jede beliebige Richtung kann durch M ausgedrückt werden.

x_1 sei eine beliebige Richtung. Dann ist:

$$x_1 = x\cos(x, x_1) + y\cos(y, x_1) + z\cos(z, x_1);$$

folglich wird:

$$\Sigma x_1\mu = M\{\cos\alpha\cos(x, x_1) + \cos\beta\cos(y, x_1) + \cos\gamma\cos(z, x_1)\}$$
$$= M\cos(M, x_1).$$

Hieraus geht hervor, dass das Hauptmoment das grösste magnetische Moment ist, und dass für jede Richtung, welche auf der Hauptrichtung senkrecht steht, das magnetische Moment null wird.

Man kann den eben bewiesenen Satz benutzen, um die Axe einer Magnetnadel zu bestimmen, oder genauer ausgedrückt, diejenige verticale Ebene, welche die Hauptrichtung des Magnetes enthält. Denn wir haben die gewöhnliche Form der Declinationsnadel im Auge, eines Magnetes also, der um eine verticale Axe in der horizontalen Ebene drehbar ist. Wir nehmen aber an, dass man die Nadel umlegen könne, d. h. ihre obere Seite mit der unteren vertauschen. Allerdings setzt man oft voraus, dass die Axe der Nadel mit der Verbindungslinie ihrer Spitzen zusammenfalle, und angenähert trifft dies zu, weil bei der Magnetisirung eine gewisse Regel befolgt wird; allein es kann doch eine merkliche Abweichung stattfinden. Um die wahre Lage der Axe zu ermitteln, geben wir der Nadel beide Stellungen und beobachten jedes Mal die Richtung, in welcher die Verbindungslinie der Spitzen sich einstellt; die Halbirungslinie der beiden beobachteten Richtungen giebt dann die Axe. Man darf diese Operation bei keiner Bestimmung unterlassen.

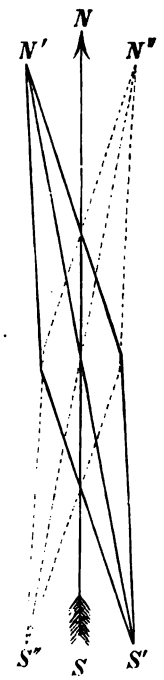


Fig. 10.

§. 7.

Messung der Stromstärke durch Beobachtung der Ablenkung einer Magnetnadel.

Wir betrachten nun die erste und einfachste Methode zur Messung der Stromstärke.

Man benutzt eine Declinationsnadel, deren Axe im Meridian steht, sobald weiter keine magnetischen Kräfte wirken. In demselben Meridian mit der Nadel wird ein langer Draht vertical gespannt. Leitet man dann durch diesen Draht einen elektrischen Strom, so wird die Nadel aus dem Meridian um einen Winkel φ abgelenkt. Zwischen diesem Winkel φ und der Stärke des Stromes, die man gewöhnlich mit j bezeichnet, besteht eine bestimmte Relation, welche wir aufsuchen wollen.

Die neue Gleichgewichtslage der Nadel wird durch den Einfluss zweier Kräfte hervorgebracht, welche von dem Erdmagnetismus und von dem elektrischen Strom herrühren. Das Drehungsmoment der erdmagnetischen Kraft ist nach dem Obigen leicht zu berechnen.

Es sei die (x, y)-Ebene horizontal, die x-Axe falle in den Meridian; ferner sei H die Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft. Dann wird auf das magnetische Fluidum μ an der Stelle (x, y) die Kraft ausgeübt

$$X = H\mu, \qquad Y = 0,$$

und hieraus folgt als Drehungsmoment um die z-Axe

$$L = -H\Sigma y\mu.$$

Nun sei M das magnetische Hauptmoment der Nadel; ferner werde die Nadel um den Winkel φ aus dem Meridian abgelenkt, so dass die Axe derselben mit dem Meridian den Winkel φ bildet. Dann ist

$$\Sigma y\mu = M\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

und es folgt also $$L = -HM\sin\varphi.$$

Welches Drehungsmoment übt nun zweitens der elektrische Strom aus? Um dasselbe zu berechnen, müssen wir das Gesetz kennen, nach welchem ein unendlich kleines Stück des Stromes auf ein Theilchen magnetischer Flüssigkeit wirkt, das sogenannte Elementargesetz der Wirkung zwischen einem Stromelement und einem magnetischen Pol.

Hierauf bezügliche Beobachtungen sind von Biot und Savart*) angestellt; daraus hat Laplace das Elementargesetz abgeleitet; wir werden später diese Wirkungen im Zusammenhang betrachten; vorderhand nehmen wir an, es sei das folgende Biot-Savartsche Gesetz aus der Erfahrung abgeleitet:

Ein Stromelement wirkt auf die magnetische Flüssigkeit μ proportional der Stromstärke j und der Länge des Elementes ds, ferner proportional der magnetischen Masse μ, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung r, endlich proportional dem Sinus des Winkels,

*) Biot et Savart. Ann. de chimie et de physique. T. XV. 1820.

unter welchem die Richtung der Verbindungslinie die Richtung des Stromes schneidet, sin (r, ds). Allein die Richtung der Kraft ist nicht die der Verbindungslinie; sondern es steht die Kraft senkrecht auf der Ebene, welche durch die Verbindungslinie und durch die Richtung des Stromelementes gelegt wird. Der Sinn, in welchem die Kraft wirkt, wird am Einfachsten durch eine von Ampère gegebene Regel bestimmt; wir wollen aber hier diese genaue Feststellung noch unterlassen.

Wir nehmen an, die Enden des Drahtes seien so weit entfernt, dass wir den Strom als unbegrenzt betrachten dürfen, und berechnen die Wirkung des unendlich langen geraden Stromes auf die magnetische Flüssigkeit μ.

Die Länge des Perpendikels von μ auf den geraden Strom sei ϱ, die Höhe des Stromelementes ds über dem Fusspunkt dieses Perpendikels s; die Wirkung des Stromelementes jds auf μ ist dann gleich

$$\frac{j\mu ds}{\varrho^2+s^2}\,\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2+s^2}},$$

folglich die Wirkung des ganzen unendlich langen geraden Stromes

$$j\mu\varrho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{(\varrho^2+s^2)^{3/2}}=\frac{2j\mu}{\varrho},$$

und diese Kraft steht senkrecht auf der Ebene durch den Strom und die Stelle μ.

Wir haben nun die Wirkungen des Stromes auf die sämmtlichen magnetischen Theilchen der Nadel zu berechnen. Der Anfangspunkt der Coordinaten liege im Mittelpunkt C der Nadel, von welchem der Draht D um a entfernt sei; die x-Axe falle, wie oben angegeben, mit dem Meridian zusammen. Dann ist die Wirkung des Stromes auf die elektrische Flüssigkeit μ an der Stelle (x, y)

$$K=\frac{2j\mu}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}},$$

und sie steht senkrecht auf der Richtung $D\mu$. Ihre Componenten nach den Axen x und y sind also

$$X=\frac{2j\mu y}{(a-x)^2+y^2},$$

$$Y=\frac{2j\mu(a-x)}{(a-x)^2+y^2}.$$

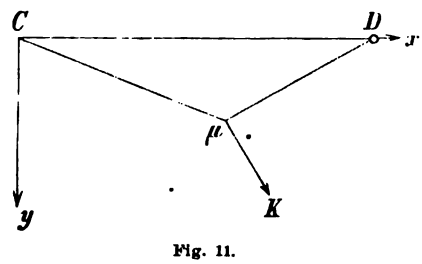


Fig. 11.

Hieraus folgt das Drehungsmoment in der horizontalen Ebene um C

$$xY-yX,$$

und wenn wir endlich die Summe nehmen über die ganze magnetische Flüssigkeit der Nadel, so ergiebt sich für das Drehungsmoment des

Stromes auf die Nadel der Werth

$$L' = 2j \sum \frac{(a-x)^2 - y^2}{(a-x)^2 + y^2} \mu .$$

Da wir die Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten in einem Magnet nicht kennen, kann der Werth der Summe nicht genau berechnet werden; es bleibt uns allein übrig, die Summe auf irgend eine Weise in eine Reihe zu entwickeln und die Coefficienten durch die Beobachtung zu bestimmen.

Wir nehmen zunächst an, die Dimensionen der Nadel seien so klein, dass wir die grössten Werthe von x und y neben a vernachlässigen dürfen; dann wird

$$L' = \frac{2j}{a} \sum x\mu = \frac{2jM\cos\varphi}{a} .$$

Damit Gleichgewicht bestehe, muss $L + L' = 0$ sein; folglich erhalten wir für die Ablenkung φ der Magnetnadel durch den Strom die Gleichung

$$HM \sin\varphi = \frac{2jM\cos\varphi}{a}$$

und somit

$$j = \frac{1}{2} aH \operatorname{tg}\varphi ,$$

die Stromstärke j ist proportional der Tangente des Ablenkungswinkels.

Damit können wir Stromstärken unter einander vergleichen; allerdings ist vorausgesetzt, es bleibe die erdmagnetische Kraft constant.

Aber die Annahme, dass x und y gegen a zu vernachlässigen seien, kann nur bei sehr starken Strömen platzgreifen; denn die Wirkung muss deutlich beobachtbar sein, wenn die Nadel in beträchtlicher Entfernung von dem Draht aufgestellt ist. Handelt es sich um die Messung schwacher oder mässig starker Ströme, so muss die Summe weiter entwickelt werden, und es ist dann vortheilhaft, statt der Coordinaten x und y andere ξ und η einzuführen, wo die Richtung ξ mit der magnetischen Hauptrichtung der Nadel zusammenfällt und η darauf senkrecht steht. Wir haben demnach zu setzen:

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi ,$$
$$y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi ,$$

und es wird

$$L' = 2j \sum \frac{a(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi) - \xi^2 - \eta^2}{a^2 - 2a(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi) + \xi^2 + \eta^2} \mu .$$

Wir entwickeln nun die Grösse unter dem Summenzeichen nach fallenden Potenzen von a; es folgt:

$$L' = 2j \sum \left\{ \frac{\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi}{a} + \frac{2(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi)^2 - \xi^2 - \eta^2}{a^2} + \ldots \right\} \mu$$

oder, da

$$\Sigma\xi\mu = M, \qquad \Sigma\eta\mu = 0 :$$

$$L' = \frac{2jM}{a}\cos\varphi + 2j\sum\left\{\frac{2(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi)^2 - \xi^2 - \eta^2}{a^2} + \ldots\right\}\mu$$

Das Glied mit $\frac{1}{a^2}$ kann noch weggeschafft werden, indem man auf der andern Seite der Nadel in derselben Entfernung a einen zweiten Draht vertical spannt und denselben Strom die beiden Drähte in entgegengesetzter Richtung durchlaufen lässt. Die Glieder mit geraden Potenzen von a müssen dann fortfallen, wir erhalten:

$$L' = \frac{C}{a}\cos\varphi + \frac{\Phi_3}{a^3} + \frac{\Phi_5}{a^5} + \ldots,$$

wo C eine Constante, die Φ dagegen Functionen von φ sind, deren Form aus der Entwicklung folgt. Wir erhalten dann für die Ablenkung φ die Gleichung

$$0 = -C_0\sin\varphi + \frac{C}{a}\cos\varphi + \frac{\Phi_3}{a^3} + \frac{\Phi_5}{a^5} + \ldots,$$

und wenn wir annehmen, dass diese Reihe rasch convergire, so lässt sich für tg φ ein Werth von der folgenden Form berechnen:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B_0}{a} + \frac{B_1}{a^3} + \frac{B_2}{a^5} + \ldots,$$

wo die B Constanten sind; B_0 hat den Werth $\frac{4j}{H}$, ist also der Stromstärke direct, der erdmagnetischen Kraft umgekehrt proportional.

Wir müssen nun den Apparat so einrichten, dass wir die Ablenkung φ für mindestens soviel verschiedene Werthe von a beobachten können, als Glieder in der Reihe beizubehalten sind. Wie weit wir da zu gehen haben, kann nur die Beobachtung entscheiden. Aus einer genügenden Anzahl von Messungen der Entfernung a und der entsprechenden Ablenkung der Nadel φ ergiebt sich der Werth von B_0, also schliesslich der Stromstärke j.

Diese Methode ist von sehr beschränkter Anwendung; bei schwachen Strömen lässt sie uns im Stich, weil wir die Entfernung a nicht wesentlich ändern können; sie wird überhaupt nur in dem Falle eines sehr starken Stromes, wo a ziemlich gross kann genommen werden, ein zuverlässiges Resultat liefern. Es ist dieselbe auch bloss auseinandergesetzt worden, um das Biot-Savartsche Gesetz in einem Falle zur Anwendung zu bringen, wo die Rechnung sehr einfach ist; für wirkliche Messungen wäre die eben angenommene Einrichtung eine ganz unzweckmässige.

§. 8.

Fechnersche Methode zur Messung der Stromstärke mittelst Beobachtung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel.

Von sehr grosser Anwendbarkeit ist dagegen diejenige Methode, welche Fechner in dem oben genannten Werke zur Messung der

Stromstärke benutzt hat; sie heisst nach ihrem Urheber die Fechnersche. Es wird nicht die Ablenkung der Nadel aus ihrer Gleichgewichtslage gemessen, sondern die Anzahl Schwingungen, welche die Magnetnadel unter dem Einflusse des Stromes in einer bestimmten Zeit macht; es folgt daraus die Stromstärke, wenn die Schwingungsdauer der Nadel unter der Wirkung der erdmagnetischen Kraft allein bestimmt ist.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall. Die Nadel stehe im Meridian; gerade über derselben sei ein sehr langer Draht horizontal und senkrecht auf den Meridian gespannt. Wenn in diesem Draht ein Strom fliesst, so wird die Nadel nicht abgelenkt: dies liefert das Mittel, um den Draht senkrecht auf den Meridian zu stellen. Versetzen wir aber die Nadel in Schwingungen, so wird die Schwingungsdauer derselben verkürzt, sobald ein Strom von bestimmter Richtung durch den Draht fliesst; die Kraft, welche die Nadel in die Gleichgewichtslage zurücktreibt, ist grösser geworden; aus der Abnahme der Schwingungsdauer folgt die Stromstärke. Wird die Richtung des Stromes umgekehrt, so wirkt derselbe in dem entgegengesetzten Sinn auf die Nadel; die Gesammtwirkung entspricht dann der Differenz der beiden einzelnen Wirkungen. Wir nehmen in der Folge immer an, der Strom sei so gerichtet, dass die Wirkungen sich summiren; diese Anordnung ist für die Messungen vortheilhafter.

Es sei φ der Winkel, den die magnetische Axe der Nadel mit dem Meridian bildet. Dann übt die erdmagnetische Kraft auf die Nadel das Drehungsmoment aus

$$-HM\sin\varphi,$$

wo wieder H die Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft, M das magnetische Hauptmoment der Nadel bezeichnet; setzen wir diesen Ausdruck gleich dem Produkt des Trägheitsmomentes $\mathfrak{M}$ der Nadel in die Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit, so folgt für die Schwingungen der Nadel die Differentialgleichung

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+HM\sin\varphi=0.$$

Dies ist aber die bekannte Pendelgleichung. Setzen wir also voraus, es seien die Amplituden der Schwingungen so klein, dass wir $\sin\varphi$ durch φ ersetzen dürfen, so folgt für die Schwingungsdauer T der Nadel unter der Wirkung der erdmagnetischen Kraft allein

$$\frac{\pi^2}{T^2}=\frac{HM}{\mathfrak{M}}.$$

Um zweitens das Drehungsmoment des Stromes auf die Nadel zu berechnen, nehmen wir die xy-Ebene horizontal und lassen die x-Axe in den Meridian fallen; die Höhe des Drahtes über dem Mittelpunkt

der Nadel sei c. Es wird dann auf die magnetische Masse μ an der Stelle (x, y, z) von dem Strom die Kraft ausgeübt

$$\frac{2j\mu}{\sqrt{x^2+(c-z)^2}},$$

wie wir oben berechnet haben, und zwar steht diese Kraft senkrecht auf der Ebene, welche durch den Draht und die Stelle μ geht; ihre Componente nach der x-Axe ist also gleich

$$\frac{2j\mu\,(c-z)}{x^2+(c-z)^2},$$

ihre Componente nach der y-Axe null; folglich wird das Drehungsmoment des Stromes auf die Nadel

$$-2j\sum\frac{(c-z)y}{x^2+(c-z)^2}\mu,$$

wo die Summe Σ wieder über alle magnetische Theilchen der Nadel auszudehnen ist.

Um die Summe zu entwickeln, führen wir für x und y wieder die neuen Coordinaten ξ und η ein, so dass ξ mit der magnetischen Axe zusammenfalle; dann wird

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$
$$y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi,$$

und das Drehungsmoment ist

$$-2j\sum\frac{(c-z)(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)}{(c-z)^2+(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)^2}\mu.$$

Wir lassen ferner die Voraussetzung eintreten, es sei c sehr gross gegen die Dimensionen der Nadel, entwickeln nach fallenden Potenzen von c und behalten bloss das erste Glied bei; so folgt:

$$-\frac{2j}{c}\sum(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\mu,$$

oder, weil $\qquad \Sigma\xi\mu = M, \qquad \Sigma\eta\mu = 0,$

$$-\frac{2j}{c}M\sin\varphi.$$

Schreiben wir endlich gleich φ statt sin φ, so folgt für die Schwingungen der Nadel unter der Wirkung der erdmagnetischen Kraft und des Stromes die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left(H+\frac{2j}{c}\right)\frac{M}{\mathfrak{M}}\varphi = 0.$$

Folglich wird in diesem Falle die Schwingungsdauer T_1 bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{\pi^2}{T_1^2} = \left(H+\frac{2j}{c}\right)\frac{M}{\mathfrak{M}}.$$

Aus der Messung der beiden Schwingungszeiten T und T_1 ergiebt sich demnach für die Stromstärke j der Werth

$$j = \frac{1}{2} Hc \frac{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T^2}}{\frac{1}{T^2}}$$

oder, wenn wir statt der Schwingungszeiten die Schwingungszahlen einführen, die Anzahl Schwingungen α und α_1, welche in einer bebestimmten Zeit stattfinden,

$$j = \frac{1}{2} Hc \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Für die einzelnen Messungen ist blos α_1 zu beobachten; α oder T behält seinen Werth, so lange die erdmagnetische Kraft und der magnetische Zustand der Nadel sich nicht ändern.

Dieses Resultat beruht auf der Voraussetzung, dass die Höhe c des Stromes über der Nadel sehr gross sei; damit wird aber die Anwendung dieser Methode ebenso beschränkt, wie die der zuerst besprochenen; die Ströme müssen sehr stark sein. In diesem Falle erhalten wir allerdings ein absolutes Maass, vorausgesetzt es sei die Grösse H, etwa wie die Schwere g, absolut bestimmt in den Einheiten von Länge und Zeit. In der Regel wird man aber bloss Stromstärken mit einander vergleichen, und wir wollen nun zeigen, dass aus der obigen Formel die Verhältnisse der Stromstärken auch in dem Falle sich ergeben, wo c durchaus nicht gross ist.

Wir gehen zurück zu dem strengen Ausdruck für das von dem Strome ausgeübte Drehungsmoment

$$L = -2j \sum \frac{(c-z)(\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)}{(c-z)^2 + (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)^2} \mu$$

und entwickeln denselben nicht nach fallenden Potenzen von c, sondern nach steigenden Potenzen von φ; wir vernachlässigen schon die Glieder mit φ^2 und erhalten

$$L = L_0 + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right)_0 \varphi.$$

L_0 muss aber gleich null sein; denn sonst würde die Nadel durch den Strom aus dem Meridian abgelenkt; setzen wir ferner

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right)_0 = -\frac{2jM}{C},$$

so ist die Grösse C bloss abhängig von dem magnetischen Zustand der Nadel und von der Entfernung c, also constant, wenn wir den Strom immer in demselben Draht fliessen lassen und dieselbe Nadel benutzen. So folgt die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(H + \frac{2j}{C}\right)\frac{M}{\mathfrak{M}} \varphi = 0,$$

und hieraus

$$j = \frac{1}{2} HC \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Fliesst dagegen in dem Draht ein Strom von der Stärke j', und ist die Schwingungszahl dann α', so ergiebt sich ebenso

$$j' = \frac{1}{2} HC \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich das Verhältniss der Stromstärken

$$\frac{j'}{j} = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha_1^2 - \alpha^2},$$

ganz unabhängig von der Grösse C.

Bei Ableitung dieser Formel ist bloss vorausgesetzt, es bleibe der Ablenkungswinkel φ immer sehr klein, so dass schon φ^2 neben φ verschwindend klein sei; die Amplituden der Schwingungen müssen sehr klein sein, höchstens etwa einen Grad erreichen; doch können sie noch viel kleiner angenommen werden.

Der Werth von c dagegen ist nun beliebig; man kann c möglichst klein machen und ganz schwache Ströme messen. Man wird sich dann mit einem Draht nicht begnügen, sondern eine Drahtrolle mit vielen Windungen benutzen; denn auch die Annahme, dass der Draht eine unbegrenzte Gerade bilde, die auf dem Meridian senkrecht stehe, ist nicht mehr nöthig. Man stellt die Rolle mit ihrer Ebene ungefähr senkrecht auf den Meridian, lässt dann einen Strom durchgehen, und verschiebt die Rolle so lange, bis durch einen Strom in derselben die Nadel nicht mehr abgelenkt wird.

Wir müssen noch zeigen, dass die Formel für das Verhältniss der Stromstärken, die wir oben gefunden haben, unabhängig ist von der Form und Anzahl der Windungen, und nur an die Voraussetzung geknüpft, es bleibe φ immer sehr klein.

Bei einer Ablenkung der Nadel um den Winkel φ übt der Strom in der Drahtrolle ein bestimmtes Drehungsmoment auf die Nadel aus, welches jedenfalls der Stromstärke j proportional ist, weil nach dem Biot-Savartschen Gesetz die Wirkung eines jeden Stromelementes j als Factor hat; wir können demnach setzen

$$L = -jMF(\varphi),$$

wo M das magnetische Hauptmoment der Nadel bezeichnet und $F(\varphi)$ von j völlig unabhängig ist. Diese im Uebrigen unbekannte Function von φ muss für $\varphi = 0$ verschwinden: wir werden dieselbe ferner nach steigenden Potenzen von φ entwickeln können, und wenn wir φ^2 neben φ wieder vernachlässigen, so folgt schliesslich

$$L = -jM\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_0 \varphi.$$

Hierin ist $\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_0$ eine Constante, wie oben C, deren Werth bedingt wird durch die Form und Anzahl der Drahtwindungen einerseits, durch

den Magnetismus der Nadel andrerseits; beobachten wir also mit derselben Nadel und derselben Drahtrolle, und bleibt auch die erdmagnetische Kraft während der Dauer der Versuche unverändert, so folgt wie oben

$$\frac{j'}{j} = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha_1^2 - \alpha^2}.$$

Die Formel hat somit allgemeine Geltung.

Es kann auf diesem Wege auch ein sehr schwacher Strom gemessen werden; aber wir wollen doch hervorheben, dass durch Vermehrung der Stromwindungen nicht unbegrenzt die Wirkung verstärkt wird; es giebt also auch da eine untere Grenze, welche die Stromstärke nicht überschreiten darf, wenn ihre Messung möglich sein soll.

Die Fechnersche Methode der Schwingungen liefert genauere Resultate, als die der Ablenkung; nur ist unter Umständen sehr unbequem, dass die Bestimmung der Schwingungszahl eine gewisse Zeit erfordert, während die Ablenkung augenblicklich abgelesen wird. Bei nicht constanten Strömen kann man daher nur diese letztere beobachten.

§. 9.

Die Tangentenboussole.

Wir wollen hier auch gleich die Instrumente angeben, mit denen man praktisch die Ablenkung misst.

Am häufigsten gelangt die Tangentenboussole zur Anwendung, so genannt, weil die Stromstärke proportional der Tangente des beobachteten Ablenkungswinkels ist; wir behalten uns vor, eine genaue Theorie dieses sehr wichtigen Instrumentes später abzuleiten. Dasselbe besteht im Wesentlichen aus einem Metallring *ACB*, der zwischen *A* und *B* auf einer sehr kurzen Strecke offen und mit Klemmschrauben versehen ist, um einen Strom hindurchleiten zu können. In der Mitte des Ringes befindet sich eine kleine Magnetnadel; nach Wilhelm Weber muss der Durchmesser des Ringes mindestens das Fünf- bis Sechsfache der Nadellänge betragen; gewöhnlich hat der Ring etwa einen Fuss Durchmesser. Der Querschnitt des Ringes muss ziemlich gross sein, damit die Ein- oder Ausschaltung der Boussole die Stromstärke nicht merkbar ändere.

Fig. 12.

Die Ebene des Ringes wird im Meridian aufgestellt, und die Berechnung der Wirkung, welche der Strom auf die Nadel ausübt, ist

sehr einfach, wenn die letztere sehr klein angenommen wird. Bezeichnet ds ein Element der Strombahn, R den Halbmesser des Ringes, so ist die Wirkung des Stromelementes auf die Masse μ im Mittelpunkt des Ringes gleich

$$\frac{j\mu ds}{R^2}$$

und steht auf der Ebene des Ringes senkrecht. Setzen wir demnach $ds = Rd\xi$ und integriren in Bezug auf ξ von 0 bis 2π, so folgt für die Wirkung des Kreisstromes auf die Masse μ im Mittelpunkt

$$\frac{2\pi j\mu}{R}.$$

Liegt nun μ nicht im Mittelpunkt, sondern an der Stelle x, y, z, und sind x, y, z so klein, dass wir jedenfalls nach steigenden Potenzen dieser Grössen entwickeln dürfen, so folgt für die Wirkung des Stromes auf μ eine Reihe, welche nach Potenzen von x, y, z fortschreitet, und das erste Glied dieser Reihe muss sein

$$\frac{2\pi j\mu}{R}.$$

Ferner wird die Richtung der resultirenden Kraft mit der Normale auf die Ringebene einen kleinen Winkel bilden, der mit x, y, z verschwindet. Vernachlässigen wir also Grössen von der Ordnung x, y, z, so wird auf die Masse μ von dem Strom die Kraft

$$\frac{2\pi j\mu}{R}$$

senkrecht auf den Meridian ausgeübt. Die Nadel ist aber allein in der horizontalen Ebene x, y drehbar; die Axe x falle wieder mit dem Meridian zusammen; dann wird auf μ das Drehungsmoment ausgeübt

$$\frac{2\pi j\mu}{R} x,$$

folglich auf die ganze Nadel das Drehungsmoment

$$\frac{2\pi j}{R} \sum x\mu = \frac{2\pi j}{R} M \cos\varphi,$$

wenn φ den Ablenkungswinkel und M das magnetische Moment der Nadel bezeichnet. Weiter liefert die erdmagnetische Kraft das Drehungsmoment

$$-HM \sin\varphi.$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht ist demnach

$$\frac{2\pi j}{R} \cos\varphi - H \sin\varphi = 0,$$

und es folgt schliesslich:

$$j = \frac{R}{2\pi} H \operatorname{tg}\varphi.$$

In der Regel wird diese Formel einfach zur Anwendung gebracht, und

man hat auch, wenn man die oben beschriebene, von Wilhelm Weber angegebene und vielfach benutzte Einrichtung trifft, kein Mittel zu entscheiden, ob die Formel genügend genau sei.

Um ein solches Mittel zu schaffen, hat Neumann seinem Apparat die folgende Form gegeben. Die Nadel ist mit ihrem Gestell auf einem Tisch senkrecht gegen die Ebene des Ringes verschiebbar, so dass die Ablenkung in verschiedener Entfernung vom Mittelpunkt des Ringes kann beobachtet werden; daraus lässt sich auf die Genauigkeit der Formel schliessen.

Die Nadel sei wieder im Vergleich mit dem Durchmesser des Ringes sehr klein. Die Wirkung des Stromelementes $j\,ds$ auf die Masse μ in der Axe des Ringes und in der Entfernung a von der Ebene desselben ist

$$\frac{j\mu\,ds}{R^2+a^2},$$

und sie steht senkrecht auf der Verbindungslinie von ds und μ. Wir zerlegen diese Kraft in ihre Componenten nach der Axe AB des Ringes und senkrecht darauf; die letztere Componente wird immer aufgehoben durch die Wirkung des correspondirenden Stromelementes ds_1, welches ds gerade gegenüber liegt. Folglich wird die resultirende Kraft gleich der Summe der Componenten nach der Richtung AB

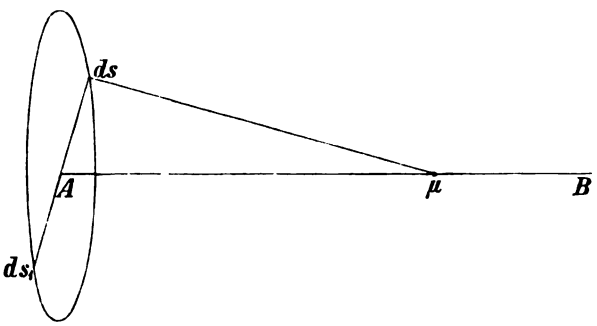


Fig. 13.

$$Y=\int \frac{j\mu}{R^2+a^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\,ds=\frac{2\pi j\mu R^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}.$$

Nun liege μ nicht in der Axe AB, sondern sehr wenig aus derselben entfernt an einer Stelle x, y, z. Machen wir dann dieselbe Voraussetzung, wie oben, und entwickeln ganz ähnlich, so folgt für das Drehungsmoment, welches der Kreisstrom auf die Nadel bei einer Ablenkung derselben aus dem Meridian um den Winkel φ ausübt, der Werth

$$\frac{2\pi R^2 jM}{(R^2+a^2)^{3/2}}\cos\varphi,$$

und hieraus, wenn der erdmagnetischen Kraft Gleichgewicht gehalten wird,

$$j=\frac{(R^2+a^2)^{3/2}}{2\pi R^2}\,H\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Für $a=0$ ergiebt sich die frühere Formel.

Um nun zu untersuchen, ob die Formel hinreichend genau sei, beobachtet man die Ablenkung für verschiedene Werthe von a, etwa $a = 0$, $a = R$, u. s. f. Es soll dann für $(R^2 + a^2)^{3/2} \operatorname{tg} \varphi$ derselbe Werth herauskommen; die Abweichungen dürfen nicht grösser sein, als die möglichen Fehler der Beobachtung. Findet sich diese Bedingung nicht erfüllt, so besitzt die Formel nicht die Genauigkeit, welche der Schärfe der Messung entspricht, und ist demzufolge nicht brauchbar.

Nach den Versuchen von Neumann besitzt die Formel hinlängliche Genauigkeit, wenn der Ablenkungswinkel bis auf halbe Grade gemessen wird und $2R$ gleich dem Fünf- bis Sechsfachen der Nadellänge ist; wird aber die Ablenkung bis auf Minuten beobachtet, so muss $2R$ mindestens das Zehnfache der Nadellänge erreichen.

Strebt man einen grössern Grad von Genauigkeit an, so muss man den genauen Ausdruck weiter entwickeln und die höhern Glieder berücksichtigen. Es zeigt sich dann bei näherer Untersuchung, dass man durch passende Aufstellung mehrerer Kreisringe oder einer Anzahl von Drahtrollen die höhern Glieder, vom zweiten an, der Reihe nach wegschaffen kann. So gewinnt man einen Raum, in welchem die Wirkung bis zu einem beliebigen Grade von Genauigkeit als constant zu betrachten ist; man hat damit eine Tangentenboussole hergestellt, welche den strengsten Anforderungen genügt; aber ein solcher Raum ist auch noch für viele andere Zwecke benutzbar. Wir werden später diese Rechnung durchführen.

Der bis jetzt betrachteten einfachen steht die multiplicirende Tangentenboussole gegenüber. Man bildet den Ring aus einer Anzahl von isolirten Drahtwindungen; jeder einzelne Umgang wirkt dann, wie oben berechnet, auf die Magnetnadel. Es sei ein dünner Draht auf einen Cylinder gewunden, dessen Halbmesser R sei, und die Anzahl der Windungen betrage α, die Dicke des Drahtes Δ, so dass die Drahtrolle die Länge $b = \alpha \Delta$ habe. Sei endlich die Mitte der Nadel um a von der Ebene der letzten Drahtwindung entfernt.

Dann ist nach dem Obigen das auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$L = 2\pi R^2 j M \cos\varphi \left\{ \frac{1}{(R^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{\{R^2+(a+\Delta)^2\}^{3/2}} + \ldots + \frac{1}{\{R^2+[a+(\alpha-1)\Delta]^2\}^{3/2}} \right\}.$$

Wenn Δ sehr klein ist und die Zahl α gross, so können wir die Summe durch das Integral ersetzen

$$\frac{1}{\Delta} \int_a^{a+b} \frac{da}{(R^2+a^2)^{3/2}};$$

wir haben dann

$$L = \frac{2\pi j M \cos\varphi}{\Delta}\left\{\frac{a+b}{\sqrt{R^2+(a+b)^2}} - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right\}.$$

Wir schreiben endlich für Δ $\frac{b}{\alpha}$ und finden als Bedingung für das Gleichgewicht

$$H \sin\varphi = \frac{2\alpha\pi j \cos\varphi}{b}\left\{\frac{a+b}{\sqrt{R^2+(a+b)^2}} - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right\}.$$

Ist b klein gegen R, setzen wir ferner

$$a + \frac{b}{2} = a_0,$$

wo a_0 die Entfernung der Nadel von der Mitte der Drahtrolle bezeichnet, so wird mit grosser Annäherung

$$\frac{a+b}{\sqrt{R^2+(a+b)^2}} - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{R^2 b}{(R^2+a_0^2)^{3/2}},$$

und wir erhalten schliesslich

$$j = \frac{(R^2+a_0^2)^{3/2}}{2\alpha\pi R^2} H \operatorname{tg}\varphi.$$

§. 10.

Wirkung der erdmagnetischen Kraft auf einen beweglichen Kreisstrom, dessen Ebene im Meridian liegt.

Eine andere Klasse von Messungsapparaten bietet im Vergleich mit den bisher betrachteten manche Vorzüge dar; allein ihre Aufstellung erfordert mehr Raum. Ihr Hauptvorzug ist der, dass die Relation zwischen der Ablenkung und der Stromstärke sofort genau erhalten wird, und ihr Wesen besteht darin, dass nicht die Wirkung des Stromes auf eine Magnetnadel, sondern die Wirkung eines Magnetes auf den beweglich gemachten Strom betrachtet wird. Als magnetische Kraft dient die von der Erde ausgeübte.

Man verschafft sich einen beweglichen Kreisstrom auf die folgenden beiden Arten:

Entweder hängt man einen Ring an einem isolirenden Faden auf; der Ring ist unten durchschnitten und die beiden Enden tragen, wie in der Zeichnung angedeutet, Spitzen, welche in Quecksilbernäpfchen eintauchen; dieselben müssen mit der Verlängerung des Fadens zusammenfallen. Wird ein Strom durch den Ring geleitet, so haben wir einen Kreisstrom, der um eine verticale Axe drehbar ist, ohne

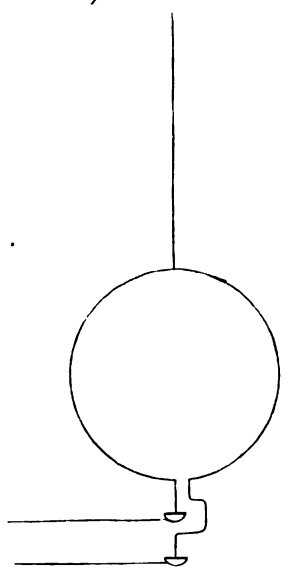


Fig 14.

dass dadurch der Strom unterbrochen wird. Dies ist die unifilare Aufhängung.

Oder der Ring ist oben durchbrochen, und an den beiden Enden sind Drähte angeschraubt; an diesen beiden Drähten wird der Ring aufgehängt, also bifilar, und durch dieselben der Strom eingeleitet. Wir erhalten so wieder einen Kreisstrom, der um eine verticale Axe drehbar ist; seine Gleichgewichtslage kommt zu Stande, indem die Schwere einer Drehung entgegenwirkt.

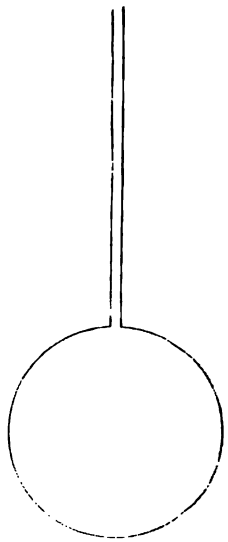


Fig. 15.

Wir wollen die Wirkung der erdmagnetischen Kraft auf einen geschlossenen, kreisförmigen, um eine verticale Axe drehbaren Strom berechnen. Die Richtung der erdmagnetischen Kraft fällt in den Meridian und bildet in unsrer Gegend mit dem Horizont einen Winkel von ungefähr 69°. Der Kreisstrom liege im Meridian, und der Strom gehe nördlich von Unten nach Oben, also südlich von Oben nach Unten. Wir suchen zunächst die Wirkung, welche auf das verticale Element des Stromes $\alpha\beta$ ausgeübt wird. Nach dem Biot-Savartschen Gesetz ist, wenn wir uns den Erdmagnetismus durch die Masse μ in der Entfernung E ersetzt denken, die Wirkung auf das Stromelement $j\,ds$ gleich

$$\frac{j\mu\,ds\sin(ds, E)}{E^2}$$

und steht senkrecht auf der Ebene (ds, E), also senkrecht auf dem Meridian. Der Sinn, in welchem die Wirkung ausgeübt wird, ergiebt sich durch die folgende Betrachtung: Wir denken uns in dem Strom schwimmend, das Gesicht nach dem magnetischen Pol μ gerichtet; dann wird der Pol nach Links getrieben, wenn er ein magnetischer Nordpol, μ also positiv ist. Die Kraft, welche von dem Pol auf das Stromelement ausgeübt wird, hat gleiche Stärke, aber entgegengesetzte Richtung; folglich wird das Stromelement nach Rechts getrieben. Hiernach wäre die Wirkung auf $\alpha\beta$ nach Osten gerichtet, wenn μ positiv wäre. Aber wir haben uns am Nordpol der Erde einen magnetischen Südpol zu denken; denn der magnetische Nordpol einer Nadel wird nach dem Nordpol der Erde hingezogen; folglich wird,

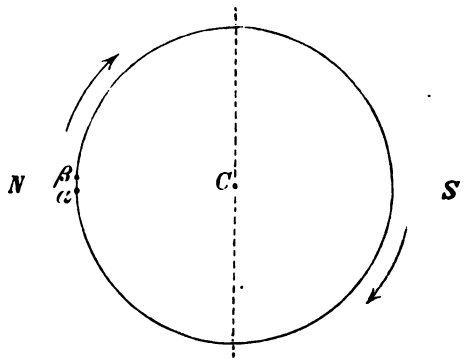


Fig. 16.

wenn der Strom die angenommene Richtung hat, das Element $\alpha\beta$ nach Westen getrieben. Endlich ist, wenn wir die erdmagnetische Kraft mit K, die Inclination, d. h. den Winkel, welchen die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit dem Horizont bildet, mit ν bezeichnen:

$$\frac{\mu}{E^2} = K, \qquad \sin(ds, E) = \cos\nu;$$

folglich ist die Wirkung auf das Stromelement gleich

$$Kjds\cos\nu$$

und gegen Westen gerichtet.

Nun sei der Kreis schon um den Winkel φ gegen Westen gedreht; die Kraft behält dieselbe Richtung und Stärke, da $\alpha\beta$ immer vertical bleibt; die Ebene des Kreises liegt aber nicht mehr im Meridian, und wir müssen die Kraft in ihre Componenten zerlegen, senkrecht auf die Stromebene und nach derselben; die letztere wird aufgehoben. Die erstere dagegen wird

$$Kjds\cos\nu\cos\varphi;$$

sie liefert, wenn wir für $K\cos\nu$ die Horizontalcomponente H der erdmagnetischen Kraft einführen, das Drehungsmoment um die durch den Mittelpunkt des Kreises gehende verticale Axe

$$HjdsR\cos\varphi,$$

wo R der Halbmesser des Kreises ist.

Wirkt keine andere Kraft, so muss, damit Gleichgewicht stattfinde, dieser Werth null sein, also

$$\cos\varphi = 0, \quad \text{d. h. } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Bloss die erstere Gleichgewichtslage ist stabil; wird der Kreis aus der letztern ein wenig herausgedreht, nach der einen oder andern Seite, so wird er durch die erdmagnetische Kraft nach der Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hingetrieben.

Dieses Resultat gilt, wie wir sehen werden, für jedes Element des Kreises, also für den geschlossenen Strom; wirkt keine andere Kraft auf denselben, so muss er sich senkrecht auf den Meridian stellen, dergestalt dass im Westen der Strom aufsteigt.

Wir berechnen nun das auf ein beliebiges Element ds des Kreises ausgeübte Drehungsmoment und nehmen dann die Summe über den ganzen geschlossenen Strom.

Der Strom fliesse im Meridian; die Drehungsaxe gehe durch den Mittelpunkt C und stehe vertical. Dann wirkt auf das Element ds die Kraft

$$\frac{j\mu}{E^2}\sin(E, ds)\,ds = jK\sin(E, ds)\,ds$$

senkrecht auf den Meridian. Die Richtung E bildet mit dem Horizont den Winkel ν; ferner sei ξ der Winkel, den das Stromelement ds mit der Verticalen bildet. Dann ist

$$(E, ds) = \frac{\pi}{2} - \nu - \xi,$$

also die Kraft

$$jK \cos(\nu + \xi)\, ds;$$

die Richtung, damit auch das Vorzeichen, soll gleich festgestellt werden. Diese Kraft wirkt an dem Hebelarm $R \cos \xi$; schreiben wir endlich für ds noch $Rd\xi$, so ergiebt sich das Drehungsmoment

$$jKR^2 \cos(\nu + \xi) \cos \xi\, d\xi.$$

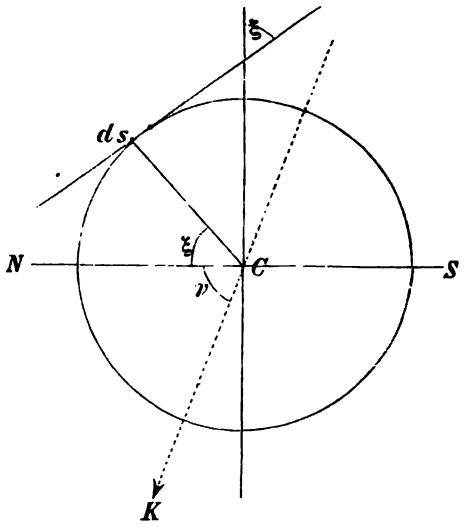


Fig. 17.

Nun steige der Strom im Norden auf; die Drehung werde von Norden nach Westen positiv gerechnet; ξ sei gleich null in dem Punkt, wo der aufsteigende Strom den Horizont schneide, und nehme mit dem Strome laufend zu bis 2π. Dann wirkt die Kraft, wie aus dem oben Bemerkten hervorgeht, nach Westen, wenn $\cos(\nu + \xi) > 0$, dagegen nach Osten, wenn $\cos(\nu + \xi) < 0$. Wir haben ferner eine positive Drehung durch eine nach Westen gerichtete Kraft, wenn $\cos \xi > 0$. Folglich hat das Drehungsmoment das in der obigen Formel genommene Vorzeichen. Das auf den Kreisstrom von der erdmagnetischen Kraft ausgeübte Drehungsmoment ist demnach

$$K = jKR^2 \int_0^{2\pi} \cos(\nu + \xi) \cos \xi\, d\xi = \pi R^2 \cdot jK \cos \nu.$$

Führen wir wieder $H = K \cos \nu$ ein, so folgt:

$$L = jH \,.\, \pi R^2,$$

d. h. das Drehungsmoment ist gleich dem Produkt von jH in den Flächeninhalt des Kreises.

Dieses Resultat kann benutzt werden, um die Stromstärke durch die Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft zu messen. Der Kreisstrom sei unifilar aufgehängt; wir tordiren den Faden so lange, bis der Kreis im Meridian einsteht; es sei dann der Torsionswinkel α und die Torsionskraft des Fadens T, also $T\alpha$ das Torsionsmoment. Damit Gleichgewicht bestehe, muss sein

$$T\alpha = jH \,.\, \pi R^2.$$

§. 11.

Ablenkung eines Kreisstromes aus dem Meridian durch die erdmagnetische Kraft.

Vortheilhafter ist jedoch das Verfahren, wo die Ablenkung des Kreises beobachtet wird. Man hängt dann den Strom auch besser bifilar auf, so dass der erdmagnetischen Kraft durch die Schwere des Apparates Gleichgewicht gehalten wird.

Mithin muss das vom Erdmagnetismus herrührende Drehungsmoment bestimmt werden, wenn der Kreis um den Winkel φ aus dem Meridian abgelenkt ist. Wir knüpfen diese Betrachtung an eine Zeichnung auf der Kugeloberfläche. Es sei MM' der Meridian, A die Drehungsaxe, SS' die Ebene des Stromes, K die Richtung der erdmagnetischen Kraft, endlich ϱ die Richtung, welche parallel dem Stromelement ds durch den Kugelmittelpunkt gelegt wird. Dann ist der Winkel MAS gleich φ, der Bogen (A, ϱ) gleich ξ.

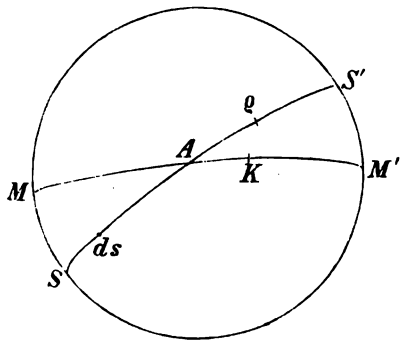


Fig. 18.

Auf das Stromelement jds wird vom Erdmagnet die Kraft ausgeübt

$$\frac{j\mu ds}{E^2} \sin(E, ds) = jKds \sin(K, \varrho)$$

senkrecht auf die Richtungen K und ds, also senkrecht auf die Ebene (K, ϱ). Bildet also diese Ebene mit der Stromebene den Winkel $\varkappa$, so wird die Componente der Kraft senkrecht auf die Stromebene

$$jKds \sin(K, \varrho) \cos\varkappa$$

und schliesslich, weil der Hebelarm gleich $R\cos\xi$ ist, das Drehungsmoment um die Axe A

$$jKR^2 \sin(K, \varrho) \cos\varkappa \cos\xi d\xi .$$

In dem sphärischen Dreieck $A\varrho K$ ist aber der Winkel in A gleich φ, der Winkel in ϱ gleich $\pi - \varkappa$, die Seite $A\varrho$ gleich ξ, die Seite AK gleich $\frac{\pi}{2} - \nu$; folglich

$$\sin\nu = \cos\xi \cos(K, \varrho) - \sin\xi \sin(K, \varrho) \cos\varkappa ,$$

$$\cos(K, \varrho) = \cos\xi \sin\nu + \sin\xi \cos\nu \cos\varphi ,$$

also $$\sin(K, \varrho) \cos\varkappa = \cos\nu \cos\varphi \cos\xi - \sin\nu \sin\xi .$$

Mithin wird das Drehungsmoment

$$jKR^2 (\cos\nu \cos\varphi \cos\xi - \sin\nu \sin\xi) \cos\xi d\xi ,$$

und da für $\varphi = 0$ der oben gefundene Werth folgt, ist das Vorzeichen richtig bestimmt.

Durch Integration über den ganzen Kreis folgt endlich

$$L = jKR^2 \left\{ \cos\nu \cos\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\xi \, d\xi - \sin\nu \int_0^{2\pi} \sin\xi \cos\xi \, d\xi \right\}$$

oder, da

$$K \cos\nu = H,$$

$$L = jH \,.\, \pi R^2 \cos\varphi.$$

Diesem Drehungsmoment möge von dem andern, welches bei bifilarer Aufhängung die Schwere ausübt, Gleichgewicht gehalten werden. Dasselbe ist gleich

$$- G \frac{ou}{4l} \sin\varphi,$$

wo G das Gewicht des ganzen Apparates, l die Länge der beiden Drähte, o und u ihre Entfernungen oben und unten bezeichnen. Die Bedingung für das Gleichgewicht wird hienach

$$jH \,.\, \pi R^2 \,.\, \cos\varphi = G \frac{ou}{4l} \sin\varphi, \tag{1}$$

eine völlig strenge Formel, so dass die Stromstärke der Tangente des Ablenkungswinkels genau proportional wird.

§. 12.

Combination mit der Tangentenboussole zur absoluten Bestimmung von j und H.

Wir können mittelst der Formel (1) die Stromstärke durch die Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft ausdrücken. Aber wir erreichen noch viel mehr, wenn wir die Ablenkung des Kreisstromes aus dem Meridian und die Wirkung desselben Stromes auf die Magnetnadel einer Tangentenboussole gleichzeitig beobachten. Nehmen wir die einfache Formel, setzen wir die Ablenkung der Nadel in der Tangentenboussole gleich ψ und den Halbmesser des Metallringes gleich R_1, so wird

$$\frac{2\pi j}{R_1} \cos\psi = H \sin\psi. \tag{2}$$

Wir leiten denselben Strom durch den beweglichen Drahtring und durch den festen Metallring der Tangentenboussole; dann gelten die Gleichungen (1) und (2) mit demselben Werth j. Multipliciren wir die Gleichungen auf beiden Seiten, so folgt

$$j^2 = G \frac{\frac{ou}{4l} R_1}{2\pi^2 R^2} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi.$$

Durch diese Formel wird die Stromstärke j unabhängig vom Erdmagnetismus bestimmt; und zwar ist das Quadrat der Stromstärke gleich

dem Gewicht G multiplicirt mit einer Zahl, denn o, u, l, R und R_1 sind Längen.

Man nennt eine solche Bestimmung eine absolute Messung der Stromstärke. Das Resultat ist unabhängig von der Aenderung des Erdmagnetismus mit dem Beobachtungsorte und von den Schwankungen der erdmagnetischen Kraft an demselben Ort; die Stromstärke wird allein durch die Schwere gemessen, welche an ein und demselben Ort constant ist und von Ort zu Ort nur sehr geringe, überdies bekannte oder sehr genau zu bestimmende Aenderungen erleidet.

Ferner kann man mittelst der Formeln (1) und (2) auch die Horizontalcomponente H der erdmagnetischen Kraft absolut bestimmen. Denn wenn wir die Gleichungen übers Kreuz multipliciren, so folgt

$$jH^2 \,.\, \pi R^2 \,.\, \cos\varphi \sin\psi = G \frac{ou}{4l} \frac{2\pi j}{R_1} \sin\varphi \cos\psi$$

oder

$$H^2 = 2G \frac{ou}{4l} \frac{1}{R_1 R^2} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\psi \,.$$

Demnach ist H^2R^2 gleich einem Gewicht, also H^2 gleich einem Gewicht, dividirt durch das Quadrat einer Länge.

Diese absolute Bestimmung von H hat einen grossen Vorzug vor den rein magnetischen Messmethoden, z. B. der von Gauss vorgeschlagenen, und zwar deshalb, weil man die beiden Ablenkungen φ und ψ gleichzeitig beobachten und so den Werth von H in einem bestimmten Augenblick finden kann. Es ändert sich nämlich der Werth dieser Grösse eigentlich fortwährend; eine rein magnetische Messung erfordert aber doch immer ein bis zwei Stunden Zeit.

Wir haben die Rechnung an den Fall eines einfachen Drahtkreises geknüpft. Um die Wirkung zu verstärken, was zur sichern Messung nöthig ist, lässt man eine Anzahl solcher Stromkreise zusammen wirken. Man wickelt einen isolirten Draht über einen Cylinder; die Drahtwindungen werden im Allgemeinen neben und über einander liegen; fliesst ein Strom durch die sehr zahlreichen Windungen, so werden wir die Stromspirale immer ersetzen können durch ein System von Kreisströmen.

Für jeden dieser Kreisströme gilt aber das oben gefundene Resultat; denn wenn auch die Drehungsaxe nicht in der Ebene des Stromes liegt, wenn sie nur vertical und der Stromebene parallel ist, so erhalten wir denselben Werth für die Componente der Kraft senkrecht auf die Stromebene und denselben Hebelarm, mithin auch dasselbe resultirende Drehungsmoment. Folglich ist das Drehungsmoment der erdmagnetischen Kraft auf die vom Strome j durchflossene Drahtrolle gleich

$$jHF \cos\varphi,$$

wenn φ die Ablenkung aus dem Meridian und F die vom Strome um-

flossene Fläche bezeichnet. Dieses F wird gleich sein dem Produkt der Anzahl α Umgänge in π und in das Quadrat des Halbmessers R_0 von einem mittlern Umgang, gleich $\alpha \pi R_0^2$.

§. 13.

Astatische Nadel; Sinusboussole.

Wir haben nun die wichtigsten Methoden zur Messung einer Stromstärke auseinandergesetzt; allein sie sind alle doch nur anwendbar, wenn der Strom eine gewisse Stärke besitzt; wir würden mit keiner derselben ein zuverlässiges Resultat erhalten, wenn es sich z. B. um Messung eines Thermostromes handelte, wo die Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen nur Bruchtheile eines Grades betrüge. Man kann sehr empfindliche Apparate herstellen, indem man eine grosse Anzahl von Drahtwindungen möglichst nahe um eine Magnetnadel herumgehen lässt; man nennt einen solchen Apparat Multiplicator oder Galvanometer. Noch empfindlicher wird die Einrichtung mittelst einer astatischen Nadel. Eine solche besteht aus zwei fest mit einander verbundenen Magnetnadeln, parallel, aber entgegengesetzt gerichtet. Hätten die beiden Nadeln genau dieselbe Stärke, so würde der Erdmagnet gar keine Richtkraft auf dieselben ausüben.

Seien die Hauptmomente der beiden Nadeln M und M'; dann ist bei der Ablenkung φ aus dem Meridian das von der erdmagnetischen Kraft ausgeübte Drehungsmoment

$$-MH\sin\varphi + M'H\sin\varphi = -(M - M')H\sin\varphi.$$

Um eine solche Nadel herzustellen, magnetisirt man zwei gleich grosse Stahlnadeln möglichst gleich stark; sollte dann der Unterschied von M und M' zu klein ausfallen, so vergrössert man denselben sofort dadurch, dass man der einen Nadel noch einen Strich in entgegengesetzter Richtung giebt.

Man bringt nun die Drahtwindungen so an, dass die eine Nadel innerhalb, die andere aber ausserhalb derselben hängt; dann wirkt nach den oben angestellten Rechnungen der Strom auf die beiden Nadeln in demselben Sinne, so dass die Wirkungen des Stromes sich summiren, während die der erdmagnetischen Kraft sich subtrahiren.

Um diese Einrichtung zu treffen, kann man in den Windungen eine Oeffnung lassen, durch welche ein die beiden Magnete tragender Metallstab hindurchgeht; doch entstehen dann Unregelmässigkeiten in den Drahtwindungen. Besser legt man einen viereckigen Rahmen um die Windungen und befestigt den einen Magnet an der obern, den andern an der untern Seite des Rahmens; der Rahmen muss so weit sein, dass eine Drehung um einen gewissen Winkel möglich ist. Dieses System kann auch nicht umschlagen, was bei der andern Einrichtung leicht geschieht, wenn der Strom zu stark wird.

Der Multiplicator wird so aufgestellt, dass die Ebenen der Drahtwindungen im Meridian liegen. Ein Strom von der Stärke j giebt dann der Nadel eine Ablenkung φ, und es handelt sich darum aus der beobachteten Ablenkung φ die Stromstärke j zu erhalten. Durch Rechnung kann das hier unmöglich geschehen; denn die Entfernungen zwischen einzelnen Stellen des Stromes und der Nadeln werden klein gegen die Dimensionen der letzteren.

Wir setzen $\beta = M - M'$, sodass β einen bestimmten constanten Werth besitzt, wenn der magnetische Zustand der Nadeln sich nicht ändert; dann muss eine Gleichung für das Gleichgewicht bestehen von der Form

$$jF(\varphi) = H\beta \sin \varphi,$$

oder einfacher geschrieben

$$jF(\varphi) = H \sin \varphi,$$

und die sogenannte Multiplicatorfunction $F(\varphi)$ muss durch den Versuch ermittelt werden. Zu diesem Zweck sind mehrere Methoden vorgeschlagen, von denen wir hier nur diejenige auseinandersetzen, welche von Poggendorff*) herrührt; es muss hiezu der ganze Apparat auf einem horizontalen, mit einer Scale versehenen Kreis drehbar sein.

Man beobachtet die Ablenkung der Nadel aus dem Meridian unter der Wirkung eines bestimmten Stromes, also z. B. eines Thermostromes, wenn die Löthstellen auf constanten Temperaturen erhalten werden; die Ablenkung der Nadel sei φ. Hierauf dreht man den ganzen Apparat so lange, bis die Nadel gegen den Multiplicator ihre ursprüngliche Stellung erhält; der Drehungswinkel sei ψ. Dann bestehen die Gleichungen:

$$jF(\varphi) = H \sin \varphi,$$
$$jF(o) = H \sin \psi;$$

folglich ist

$$F(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} F(o).$$

Wendet man verschieden starke Ströme an, so erhält man verschiedene Ablenkungen φ, also die Werthe der Function F für verschiedene Werthe ihres Arguments. Sind die Windungen des Multiplicators ganz regelmässig, so genügt es, $F(\varphi)$ von 10^0 zu 10^0 zu bestimmen und dazwischen zu interpoliren. Gehen die Windungen um ein Rohr, welches die Axe der Nadeln durchlässt, so erleidet die Function $F(\varphi)$ in der Nähe von $\varphi = 0$ unregelmässige Aenderungen, und es sind dann für diese Werthe mehr Bestimmungen erforderlich.

Die Methode hat entschiedene Mängel. Die Multiplicatorfunction ändert sich mit der Zeit, schon wegen der Aenderungen in der Länge

*) Pogg. Ann. Bnd. 56. 1842.

des Fadens, an welchem die Nadeln aufgehängt sind; denn weil die Nadeln den Drahtwindungen so nahe sind, übt die kleinste Aenderung in ihrer Lage einen merklichen Einfluss aus.

Man giebt dem Instrument auch wohl eine etwas andere Form; es heisst dann Sinusboussole. Eine gewöhnliche oder eine astatische Nadel ist von einem Multiplicator umgeben; die Nadel trägt einen Zeiger, der auf einer Marke steht, wenn die Nadel gegen den Multiplicator eine bestimmte Stellung einnimmt; der ganze Apparat ist endlich auf einem horizontalen Kreis mit Scale drehbar. Man dreht immer so lange, bis der Zeiger auf der Marke steht, die Nadel also gegen den Multiplicator dieselbe Stellung einnimmt.

Der Zeiger steht auf der Marke, wenn kein Strom in dem Multiplicator fliesst. Man lässt nun den Strom eintreten und muss um den Winkel ψ drehen, damit der Zeiger wieder auf der Marke stehe. Dann ist

$$jF(o) = H \sin \psi$$

oder

$$j = \frac{H}{F(o)} \sin \psi ,$$

d. h. die Stromstärke ist dem Sinus des Winkels ψ proportional. Es wird sich nur um Vergleichung von Stromstärken handeln; dann braucht die Constante $\frac{H}{F(o)}$ nicht bestimmt zu werden.

Diese Beobachtungsweise ist ziemlich mühsam, da man meistens mehrmals hin- und herdrehen muss, damit der Zeiger einstehe; deshalb können Stromstärken nicht rasch bestimmt, variable Ströme also nicht gemessen werden. Gewöhnlich sind die Instrumente so eingerichtet, dass man dieselben je nach Umständen als Multiplicator, wie oben, oder als Sinusboussole benutzen kann; es bedarf dazu nur zweier getheilter Kreise.

Wir haben nun die wichtigsten Methoden zur Messung der Stromstärke mittelst elektromagnetischer Wirkungen kennen gelernt; zur Besprechung andrer Methoden fehlen uns noch die Mittel. Wir wenden uns daher jetzt zu dem zweiten Theil der Ohmschen Gesetze, welcher von dem Einfluss des Weges handelt, den der Strom durchläuft.

§. 14.

Zweiter Theil der Ohmschen Gesetze für unverzweigte Ströme. — Ableitung aus der Beobachtung.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo der Strom nur einem einzigen Wege folgen kann, den Fall von unverzweigten Strömen; auf den Fall von Verzweigungen werden wir erst später eingehen. Wir nehmen ferner bei unsrer Darstellung an, es seien die Gesetze direct aus der Beobachtung abgeleitet; das steht mit der historischen Entwicklung nicht im Einklang; denn Ohm ist von theoretischen Betrachtungen

ausgegangen, und die Folgerungen aus denselben sind durch die Beobachtung bestätigt worden.

Wir legen unsrer Betrachtung eine Thermokette zu Grunde; sie bestehe aus dem kurzen Wismuthstück ADB und aus dem sehr langen Kupferdraht ACB; halten wir die beiden Löthstellen A und B auf den Temperaturen 0^0 und 100^0, was praktisch leicht zu erreichen ist, so wird ein ganz constanter Strom erzeugt. Da ACB im Vergleich mit

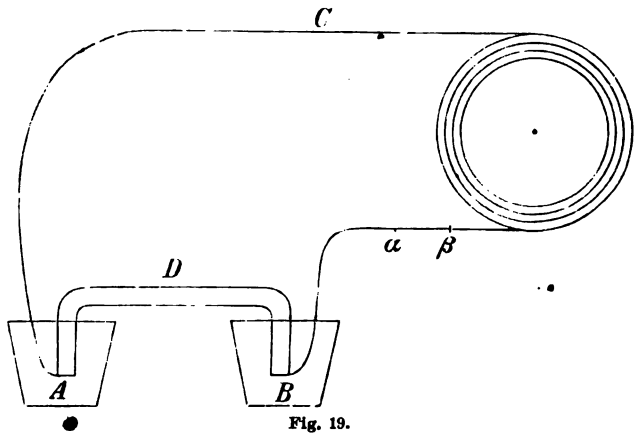


Fig. 19.

ADB ausserordentlich lang sein soll, können wir annehmen, der ganze von dem Strom zu durchlaufende Weg bestehe in der sogenannten Schliessung ACB; wir werden in der Folge sehen, dass diese Annahme um so eher gestattet ist, je dicker wir das Wismuthstück ADB wählen. Endlich sei zwischen α und β der Schliessungsdraht unterbrochen und die Einrichtung getroffen, dass verschieden lange Drahtstücke an dieser Stelle in die Strombahn können eingeschaltet werden; diese Drahtstücke seien zunächst von genau derselben Art, wie der Schliessungsdraht, also von demselben Metall und von demselben Durchmesser.

Die Länge des Schliessungsdrahtes betrage L_0, die Längen der eingeschalteten Drahtstücke $0, l_1, l_2 \ldots$, die Stromstärken $j_0, j_1, j_2 \ldots$ Die Beobachtung ergiebt, dass zwischen den letztern die Beziehungen stattfinden:

$$j_0 : j_1 : j_2 : \cdots = \frac{1}{L_0} : \frac{1}{L_0+l_1} : \frac{1}{L_0+l_2} : \cdots .$$

Folglich ist

$$j = \frac{A}{\alpha(L_0+l)},$$

wenn l die Länge des eingeschalteten Drahtstückes, j die Stromstärke und A die Summe der elektromotorischen Kräfte bezeichnet, welchen letzteren die Stromstärke nach dem ersten Ohmschen Gesetze direct proportional ist; α bedeutet eine Constante; die Stromstärke ist also der Länge des vom Strom durchlaufenen Weges umgekehrt proportional.

Weiter seien die eingeschalteten Drahtstücke immer noch von demselben Metall, wie der Schliessungsdraht, aber verschieden dick; wir messen wieder die Stromstärke. Es zeigt sich, dass nun, wenn L_1 die Länge des z. B. dickern Drahtstückes bezeichnet, die Stromstärke j_1 bestimmt wird durch die Formel:

$$j_1 = \frac{A}{\alpha L_0 + \alpha_1 L_1},$$

woraus in Verbindung mit

$$j_0 = \frac{A}{\alpha L_0}$$

folgt:

$$\alpha_1 = \alpha \left(\frac{j_0}{j_1} - 1\right) \frac{L_0}{L_1}.$$

Denn die Messungen ergeben, dass der Werth α_1 von den Längen L_0 und L_1 unabhängig ist.

Wählen wir aber zu den Einschaltungen verschieden dicke Drähte, messen deren Durchmesser $2R_1$, $2R_2$ ... und beobachten die Stromstärken, so finden wir, dass

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \cdots = \frac{1}{R_1^2} : \frac{1}{R_2^2} : \cdots .$$

Die Quadrate der Halbmesser sind den Querschnitten proportional; demnach können wir setzen

$$j = \frac{A}{\beta \left(\frac{L_0}{q_0} + \frac{L_1}{q_1}\right)},$$

wo q_0 den Querschnitt des Schliessungsdrahtes von der Länge L_0, q_1 den Querschnitt des eingeschalteten Drahtes von der Länge L_1 bezeichnet. Und Ohm hat nachgewiesen, dass die Form des Querschnittes ohne Einfluss auf den Strom ist; er walzte die Drähte platt, nachdem er vorher die Stromstärke gemessen hatte, und fand dieselbe nachher unverändert. Folglich wird β eine Constante sein, welche bloss von der Qualität des Leiters abhängt.

Hiernach muss sein, wenn ein Draht aus anderm Metall eingeschaltet wird, von dem Querschnitt q_1 und der Länge L_1,

$$j = \frac{A}{\beta_0 \frac{L_0}{q_0} + \beta_1 \frac{L_1}{q_1}},$$

wo β_0 den Werth der Constanten für das Metall der Schliessung, β_1 aber für das Metall der Einschaltung bezeichnet. Man setzt in der Regel

$$\beta = \frac{1}{k}$$

und nennt k die elektrische Leitungsfähigkeit. Wir können dann das vollständige Ohmsche Gesetz für einen unverzweigten Strom folgendermaassen aussprechen:

Die Stromstärke ist gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte in dem einfachen Umgang, dividirt durch den Widerstand desselben. Dieser ist gleich der Summe von den Widerständen der einzelnen Theile, und der Widerstand eines Theiles ist gleich der Länge des Drahtes, dividirt durch das Produkt der Leitungsfähigkeit in den Querschnitt.

Wir haben:

$$j = \frac{A}{W},$$

$$W = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots,$$

$$w_0 = \frac{L_0}{k_0 q_0}, \qquad w_1 = \frac{L_1}{k_1 q_1}, \ldots .$$

In diesen Formeln bezeichnet A die Summe der elektromotorischen Kräfte in dem ganzen einfachen Umgang, W den gesammten Widerstand des einfachen Umgangs, w_0, w_1, w_2, ... die Widerstände der einzelnen Theile, aus denen der Umgang besteht.

Ohm ist, wie schon erwähnt, durch theoretische Betrachtungen zu diesem Gesetz geführt worden; wir gehen auf seine Theorie näher ein, nachdem wir einige Anwendungen von dem Gesetze gemacht haben.

§. 15.

Anwendung auf eine Thermokette; Bestimmung der thermoelektrischen Spannungszahlen.

Zunächst sei eine Thermokette aus den drei Metallen A, B, C gebildet, und zwar sollen A, B, C wieder die Spannungszahlen der drei Metalle als Functionen der Temperatur bezeichnen. Die Temperaturen der Löthstellen α, β, γ seien t, t_1, t_2. Dann ist die Summe der elektromotorischen Kräfte in dem einfachen Umgang

$$(B - A)_t + (C - B)_{t_1} + (A - C)_{t_2},$$

der Gesammtwiderstand gleich der Summe von den Widerständen der drei Theile

$$w_A + w_B + w_C.$$

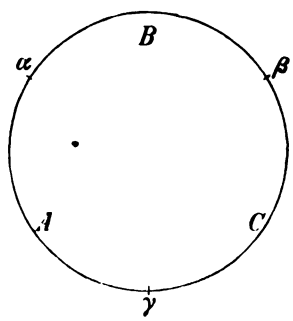


Fig. 20.

Wir nehmen erstens an, die Löthstellen β und γ haben dieselbe Temperatur t_1, die Löthstelle α aber die Temperatur $t_1 + \tau$, und es sei τ so klein, dass wir bei Entwicklung der Spannungszahlen nach steigenden Potenzen von τ die höhern Potenzen vernachlässigen dürfen. Dann wird die Stromstärke

$$j = \frac{(B' - A')\tau}{w_A + w_B + w_C}.$$

Aehnlich folgt, indem wir β und dann γ den Temperaturüberschuss τ geben,

$$j_1 = \frac{(C' - B')\,\tau}{w_A + w_B + w_C},$$

$$j_2 = \frac{(A' - C')\,\tau}{w_A + w_B + w_C}.$$

Hiebei sind die Stromstärken positiv gerechnet, wenn der Strom in der Richtung ABC fliesst. Aus den Gleichungen folgt

$$j + j_1 + j_2 = 0,$$

die Summe der drei Stromstärken ist null, und die Erfahrung bestätigt diese Folgerung, soweit das thermoelektrische Spannungsgesetz gilt. Die Gleichungen geben ferner

$$\frac{j}{j_1} = \frac{B' - A'}{C' - B'}, \quad \text{u. s. w.}$$

Man kann also die Verhältnisse der Differenz von thermoelektrischen Spannungszahlen durch Messung von Stromstärken bestimmen, und die Zahlen, welche wir oben nach Becquerel angegeben haben, sind auf diesem Wege gefunden.

Eine weit umfangreichere Tafel findet sich in einer Arbeit von Matthiessen*); sein Verfahren ist von dem obigen etwas verschieden. Er nimmt zwei Thermoelemente AB und AC, giebt den Löthstellen α und β denselben Temperaturüberschuss τ, und verbindet die beiden Elemente mittelst derselben Drähte auf die beiden durch die Zeichnung angedeuteten Arten. Da der Widerstand genau derselbe ist, finden wir einmal

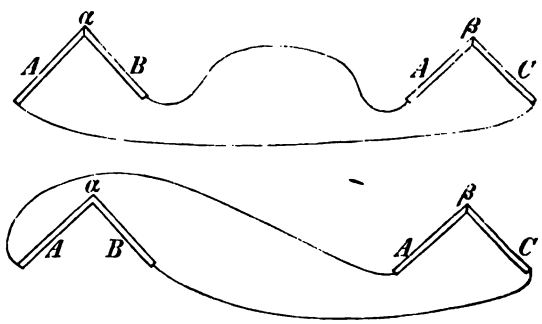


Fig 21.

$$j_1 = \frac{(B' - A')\,\tau + (C' - A')\,\tau}{w},$$

das andre Mal

$$j_2 = \frac{(B' - A')\,\tau + (A' - C')\,\tau}{w};$$

folglich ist

$$\frac{j_1 + j_2}{j_1 - j_2} = \frac{B' - A'}{C' - A'}.$$

Wir erhalten also wiederum durch blosse Vergleichung von Stromstärken das Verhältniss der thermoelektrischen Spannungsunterschiede.

*) Matthiessen. Pogg. Ann. 103.

§. 16.

Bestimmung des relativen Widerstandes.

Wir machen noch eine zweite Anwendung von dem Ausdruck für die Stromstärke in einer Thermokette, nämlich zur Bestimmung des Widerstandes. Es kann dies nur eine relative Bestimmung sein; denn zu einer absoluten Bestimmung des Widerstandes fehlen uns noch alle Mittel, und wir werden erst am Schlusse unsrer Betrachtungen zu einer solchen befähigt sein.

Es sei ein bestimmter Messdraht gegeben, etwa ein Silberdraht von bestimmter Länge und Dicke, mit dessen Widerstand m andre Widerstände sollen verglichen werden, ein sogenannter Widerstandsetalon. Wir denken uns den Strom mittelst eines Thermoelementes erzielt, und dessen Löthstelle erhalte immer denselben Temperaturüberschuss τ, so dass die elektromotorische Kraft denselben Werth $(B' - A')\tau$ besitze. Wir haben dann, wenn w den Widerstand der Schliessung bezeichnet, ohne Einschaltung die Stromstärke

$$j_0 = \frac{(B' - A')\tau}{w},$$

bei Einschaltung des Messdrahtes dagegen

$$j_1 = \frac{(B' - A')\tau}{w + m},$$

endlich bei Einschaltung eines Drahtes, dessen Widerstand x soll bestimmt werden,

$$j_2 = \frac{(B' - A')\tau}{w + x}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{j_0 - j_1}{j_1} = \frac{m}{w}, \qquad \frac{j_0 - j_2}{j_2} = \frac{x}{w},$$

also

$$x = \frac{j_1}{j_2}\frac{j_0 - j_2}{j_0 - j_1} m.$$

Wir werden später noch bessere Methoden zur Bestimmung des Widerstandes kennen lernen. Die Messungen sind sehr zahlreich. Aus x folgt das Leitungsvermögen k, wenn wir die Länge l und den Querschnitt q des eingeschalteten Drahtes bestimmen,

$$x = \frac{l}{kq}, \quad \text{also } k = \frac{l}{qx}.$$

Man setzt gewöhnlich die Leitungsfähigkeit des Silbers gleich 100; dann werden die Leitungsfähigkeiten der am häufigsten vorkommenden Metalle etwa die folgenden Werthe haben:

Silber	100
Kupfer.	77
Eisen	14
Platin	10
Neusilber . . .	7,6
Antimon. . . .	4,3
Wismuth . . .	1,2.

Man muss diese Zahlen kennen, um einem Apparat die beste Einrichtung zu geben. In der Regel ist der Widerstand durch den Multiplicator bedingt; es fragt sich, wie man die Kette anzuordnen hat, damit die Stromstärke möglichst gross werde.

Der Werth k hängt von der Temperatur ab, und in der Regel sind die Aenderungen mit der Temperatur gar nicht unbedeutend. So hat Neumann gefunden, dass für Kupfer

$$k = k_0 (1 - 0{,}0042 \,.\, t),$$

wo t die Temperatur in Réaumurgraden bedeutet; bei einer Temperaturerhöhung um 10^0 wird also das Leitungsvermögen um $\frac{1}{25}$ verringert. Das wird für genaue Messungen sehr hinderlich, da Temperaturschwankungen in der Schliessung kaum zu vermeiden sind. Ein praktisch sehr brauchbares Metall, wo der Einfluss der Temperatur sehr gering ist, besitzen wir im Neusilber; da hat Neumann gefunden, dass

$$k = k_0 (1 - 0{,}00055 \,.\, t).$$

Diese Legirung ist deshalb zu Messdrähten sehr geeignet; allerdings besitzt sie ein sehr kleines Leitungsvermögen.

Matthiessen*) hat eine sehr umfangreiche Tafel für die Leitungsfähigkeit der Metalle gegeben, auch die Aenderungen mit der Temperatur bestimmt. Im Allgemeinen nimmt bei den Leitern erster Classe das Leitungsvermögen mit wachsender Temperatur ab; nur bei der Gaskohle findet das Umgekehrte statt; sie verhält sich analog einem Leiter zweiter Classe, welcher durch den Strom zersetzt wird. Bei einer Flüssigkeit, Quecksilber ausgenommen, steigt das Leitungsvermögen mit wachsender Temperatur; aber es finden da immer chemische Processe statt, welche eine elektromotorische Wirkung ausüben.

Die Leitungsfähigkeit hängt sehr von dem Grad der chemischen Reinheit ab, welche das Metall besitzt; kleine Beimengungen fremder Substanz haben merklichen Einfluss. Aber auch die physikalische Beschaffenheit, namentlich die Härte kommt in Betracht. Wir wollen hier bloss den folgenden Versuch nennen:

Es sei ein Draht horizontal gespannt; seine Länge betrage L, sein Querschnitt q, dann ist der Widerstand

$$w = \frac{L}{kq}.$$

Nun werde ein Gewicht in der Mitte des Drahtes angehängt; dadurch werde die Länge um λ, der Querschnitt um q' geändert, wo q' negativ ist; der Widerstand würde mithin

$$w' = \frac{L + \lambda}{k(q + q')},$$

*) Matthiessen. Pogg. Ann. 103.

wenn das Leitungsvermögen in beiden Zuständen gleich wäre. Wir messen w und w', bestimmen ferner λ durch Beobachtung der Senkung, welche die Mitte des Drahtes erlitten hat. Hieraus ergäbe sich

$$\frac{q'}{q} = -\left\{1 - \frac{L+\lambda}{L}\,\frac{w}{w'}\right\},$$

also die Aenderung des Querschnitts oder die seitliche Contraction bei der Längendilatation $\frac{\lambda}{L}$. Allein die so erhaltenen Werthe sind unannehmbar. Dies kann nur darin seinen Grund haben, dass das Leitungsvermögen des Drahtes sich mit der Spannung ändert; in den beiden Gleichungen hat dann k verschiedenen Werth. Wir fügen noch bei, dass die Elasticitätsgrenze bei der Dehnung nicht soll überschritten werden.

§. 17.

Ableitung der Ohmschen Gesetze aus theoretischen Betrachtungen.

Wir wollen jetzt die theoretischen Betrachtungen darlegen, welche Ohm zu dem nach ihm genannten Gesetz für die Stromstärke geführt haben.

Ohm nimmt an, dass alle Strömungen aus dem Unterschied der elektroskopischen Spannungen an den einzelnen Stellen des geschlossenen Umgangs entstehen. Um eine deutliche Vorstellung von dem zu erhalten, was Ohm elektroskopische Spannung nennt, könnten wir auch von dem Unterschied der elektrischen Dichtigkeiten an den verschiedenen Stellen sprechen; allein diese Uebersetzung von elektrischer Spannung in Dichtigkeit ist eine wesentlich spätere Auffassung, und wir wollen uns jetzt noch an die Ohmsche Terminologie halten. Wir verstehen demnach unter dem Unterschied der elektroskopischen Spannungen in den Punkten a und b den Unterschied zwischen den Ladungen des Elektroskops, wenn wir in dem Punkte a und dann in dem Punkte b eine Messung anstellen. Diesem Unterschied der elektroskopischen Spannung in den Punkten a und b ist nach Ohm die Stärke des Stromes von a nach b proportional; unter der Stromstärke versteht aber Ohm die Menge von Elektricität, welche in einer bestimmten Zeit durch einen Querschnitt hindurchströmt; die Strömung wird stationär, wenn durch jeden Querschnitt in derselben Zeit dieselbe Menge von Elektricität strömt, und nur solche Ströme werden betrachtet.

In jedem Stücke eines homogenen Leiters soll die Stromstärke dem Unterschied der Spannungen an den beiden Enden proportional sein; damit ist die Spannung an einer jeden Stelle des Leiters durch die Spannungen an den beiden Enden bestimmt. Der Draht habe die Länge L; an den beiden Enden seien die Spannungen A und B gegeben; eine beliebige Stelle des Drahtes habe den Abstand x von dem Ende A,

auf dem Drahte gemessen. Dann ist die Spannung u an der Stelle x eine lineare Function von x, und zwar

$$u = A + \frac{B-A}{L} x.$$

Denn es wird durch diese Gleichung den Bedingungen Genüge geleistet, dass $u = A$ für $x = 0$ und $u = B$ für $x = L$. Nehmen wir ferner vier Punkte α, β, α', β' in den Entfernungen x, $x + \xi$, x', $x' + \xi$ vom Anfang des Drahtes, so werden die Spannungen

$$\text{in } \alpha \quad A + \frac{B-A}{L} x,$$

$$\text{in } \beta \quad A + \frac{B-A}{L} (x + \xi),$$

$$\text{in } \alpha' \quad A + \frac{B-A}{L} x',$$

$$\text{in } \beta' \quad A + \frac{B-A}{L} (x' + \xi).$$

Da die Entfernungen von α und β und von α' und β' gleich sein sollen und die Strömung stationär, muss die Differenz der Spannungen in α und β und in α' und β' gleich sein; diese beiden Differenzen werden aber

$$\frac{B-A}{L} \xi,$$

also wirklich einander gleich, wenn $\frac{B-A}{L}$ constant, d. h. von x oder x' unabhängig ist, und nur dann; denn die Lage des einen Punktes ist ganz willkührlich und der Abstand ξ allein wesentlich.

Wie gross ist nun die Menge von Elektricität, welche in einer bestimmten Zeit durch den Querschnitt des Leiters an der Stelle α hindurchströmt?

Wir betrachten zwei Leiterstücke, AB und $A_1 B_1$, von den Längen L und L_1. Die Strömung sei in beiden stationär; A, B und A_1, B_1 bezeichnen die Spannungen an den beiden Enden, u und u_1 in beliebigen Punkten von AB und $A_1 B_1$. Dann ist

$$u = A + \frac{B-A}{L} x,$$

$$u_1 = A_1 + \frac{B_1 - A_1}{L_1} x_1.$$

Demnach sind die Spannungsdifferenzen in den Punkten α und β von AB, und in den Punkten α_1 und β_1 von $A_1 B_1$, wenn der Abstand der beiden Punkte immer ξ beträgt:

$$\Delta u = \frac{B-A}{L} \xi,$$

$$\Delta u_1 = \frac{B_1 - A_1}{L_1} \xi.$$

Nun soll die Menge von Elektricität, welche durch den Querschnitt x strömt, Δu proportional sein, die Menge, welche durch den Quer-

schnitt α_1 strömt, Δu_1 proportional. Folglich ist das Verhältniss der in gleichen Zeiten durch die Querschnitte α und α_1 strömenden Elektricitätsmengen M und M_1

$$\frac{M}{M_1} = \frac{\frac{B-A}{L}}{\frac{B_1-A_1}{L_1}}.$$

Wir haben hiebei die Voraussetzung gemacht, dass die Natur der beiden Leiter dieselbe sei, und dass auch die Querschnitte derselben gleich gross seien. Wird aber der Querschnitt des einen Leiters verdoppelt oder verdreifacht, während die Spannungen denselben Werth behalten, so muss durch den Querschnitt die doppelte oder dreifache Elektricitätsmenge strömen. Nehmen wir also an, der Querschnitt des Leiterstückes AB sei Q, der des Leiterstückes $A_1 B_1$ dagegen 1, so finden wir

$$M = M_1 Q \frac{\frac{B-A}{L}}{\frac{B_1-A_1}{L_1}}.$$

Setzen wir endlich noch $L_1 = 1$, $B_1 - A_1 = 1$, so folgt:

$$M = M_1 Q \frac{B-A}{L}.$$

Die in dem Leiter $A_1 B_1$ unter den Bedingungen $Q_1 = 1$, $L_1 = 1$, $B_1 - A_1 = 1$ durch einen Querschnitt während einer bestimmten Zeit strömende Elektricitätsmenge M_1 kann nur von der Natur dieses Metalls abhangen; sie ist also eine dem betreffenden Metall eigenthümliche Constante. Da ferner $B_1 - A_1 = 1$, also $B_1 > A_1$ gesetzt ist, strömt die positive Elektricität von B_1 nach A_1. Man unterscheidet nun zweckmässig positive und negative Strömungen, je nachdem die positive Elektricität in der vorher als positiv festgesetzten Richtung strömt, oder in der entgegengesetzten, und man giebt dann auch der Menge positiver Elektricität, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömt, das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die positive Elektricität in der positiven oder in der negativen Richtung durch den Querschnitt fliesst. Wir setzen daher $M_1 = -K$, indem wir die Richtungen von A nach B und von A_1 nach B_1 als die positiven annehmen, und es hat dann die Constante K einen positiven Werth; sie bestimmt, wie wir schon sahen, die Leitungsfähigkeit des Metalles.

Die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters AB strömende positive Elektricität wird demnach durch die Formel bestimmt:

$$M = KQ \frac{A-B}{L}.$$

Die Stromstärke j wird aber durch die Menge M gemessen; wir haben also auch

$$j = KQ\frac{A-B}{L}.$$

Der Strom fliesst in der positiven Richtung von A nach B, wenn $A > B$ ist; in diesem Falle wird somit die Stromstärke einen positiven, im entgegengesetzten Falle aber einen negativen Werth erhalten.

Wir wollen jetzt für einen Augenblick die Voraussetzung fallen lassen, dass die Strömung stationär sei, und annehmen, die Spannung u in einem Leiter AB sei eine beliebige, aber stätige Function der Stelle x:

$$u = f(x).$$

Wir werden dann für einen sehr kleinen Theil des Leiters, für Werthe von x zwischen x und $x + \xi$ etwa, wo $0 < \xi < \xi_1$ und ξ_1 sehr klein ist, immer setzen dürfen

$$u = f(x) + f'(x) \cdot \xi,$$

indem wir nach steigenden Potenzen von ξ entwickeln und mit dem zweiten Gliede abbrechen. Wir können also innerhalb dieser engen Grenzen u als eine lineare Function von ξ betrachten, und indem wir auf die Stellen x und $x + \xi$ die oben gefundene Formel anwenden, folgt, dass durch den Querschnitt an der Stelle x in der Zeiteinheit und in der Richtung der wachsenden x die Menge positiver Elektricität strömt

$$-KQ\frac{du}{dx}.$$

Durch den Querschnitt an der Stelle $x + \xi$, wo ξ sehr klein ist, wird demnach die Menge strömen

$$-KQ\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x+\xi} = -KQ\left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\xi\right).$$

In das Leiterstück von der Länge ξ strömt also in der Zeiteinheit die Menge positiver Elektricität

$$KQ\frac{d^2u}{dx^2}\xi$$

mehr ein, als aus; denn die erstere Menge strömt an dem einen Ende in das kleine Stück ein, die andere an dem andern Ende aus dem Stück aus; folglich bleibt die Differenz der beiden Mengen in dem Leiterstück. Die Strömung kann nur stationär sein, wenn das Stück keinen Zuwachs von Elektricität erhält, wenn also

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass u eine lineare Function von x sein muss; das ist also die Bedingung einer stationären Strömung. Wir haben weiter für die Stromstärke

$$j = -KQ\frac{du}{dx}.$$

Diese Betrachtung kann leicht auf den Fall ausgedehnt werden, wo

die Elektricität nicht in einem Draht, einem linearen Leiter strömt, sondern in einer Fläche oder in einem Raum; wir wollen das aber erst später thun.

Ohm nennt die Abgeleitete der Spannung das Gefälle; die Stromstärke ist also gleich dem Produkt der Constante K in den Querschnitt Q und in das Gefälle; da u eine lineare Function von x ist, wird das Gefälle gleich dem Unterschiede der Spannungen an zwei Stellen, dividirt durch den Abstand der beiden Stellen, oder auch gleich dem Unterschiede der Spannungen an zwei Stellen, welche um die Längeneinheit von einander entfernt sind.

§. 18.

Anwendung der Formel auf eine aus drei Elementen bestehende Kette. Zwei Sätze zur Bestimmung der Constanten.

Wir wenden die Formel auf eine Thermokette an, welche aus den drei Metallen A, B, C bestehe. Die Löthstellen seien α, β, γ und ihre Temperaturen t, t_1, t_2, die Längen der drei Stücke l, l_1, l_2, endlich die Spannungen in den einzelnen Stücken u, u_1, u_2; es sind dies Functionen der Abstände x, x_1, x_2, immer von dem Anfange γ, α oder β des betreffenden Stückes an gerechnet. Die Strömung ist stationär, wenn die Temperaturen t, t_1, t_2 constant erhalten werden. Folglich ist dann:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2u_1}{dx_1^2} = 0, \qquad \frac{d^2u_2}{dx_2^2} = 0.$$

Durch Integration ergiebt sich

$$u = m + n\,x,$$
$$u_1 = m_1 + n_1 x_1,$$
$$u_2 = m_2 + n_2 x_2,$$

mit sechs willkührlichen Constanten m und n. Zur Bestimmung derselben haben wir die folgenden beiden Sätze:

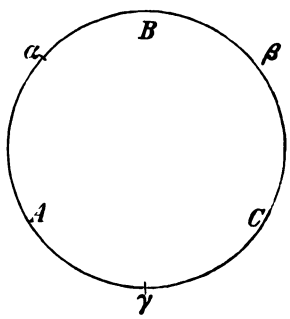


Fig. 22.

1) Der Unterschied der Spannungen zu beiden Seiten einer Löthstelle ist dem Unterschied der Spannungszahlen gleich.

2) An jeder Löthstelle muss ebenso viel Elektricität ein- wie ausströmen.

Der erste Satz giebt für die drei Löthstellen α, β, γ die Gleichungen:

$$m + n\,l - m_1 = A_t - B_t,$$
$$m_1 + n_1 l_1 - m_2 = B_{t_1} - C_{t_1},$$
$$m_2 + n_2 l_2 - m = C_{t_2} - A_{t_2}.$$

Der zweite Satz dagegen liefert, wenn die Querschnitte der drei Stücke

Q, Q_1, Q_2 und die Werthe der Constanten K für die drei Metalle K, K_1, K_2 sind,

$$K\,Q\,n = K_1 Q_1 n_1\,,$$
$$K_1 Q_1 n_1 = K_2 Q_2 n_2\,,$$
$$K_2 Q_2 n_2 = K\,Q\,n\,.$$

Wie sofort ersichtlich, sind das bloss zwei Gleichungen; denn die dritte Gleichung folgt sofort aus den beiden ersten. Der zweite Satz liefert also nur die beiden Gleichungen

$$KQn = K_1 Q_1 n_1 = K_2 Q_2 n_2\,.$$

Zur völligen Bestimmung der Constanten fehlt demnach noch eine Gleichung. Diese wird durch eine weitere Bedingung geliefert, welche je nach Umständen verschiedene Form besitzt.

Ist die Kette isolirt, so muss die Summe der Spannungen, genommen über alle Theile der Kette, gleich null sein.

Gewöhnlich wird aber eine Stelle der Leitung mit dem Erdboden leitend verbunden sein; dann muss die Spannung an dieser Stelle gleich null sein.

Die eine oder die andere Bedingung giebt den absoluten Werth von einer der drei Constanten m, m_1, m_2; in den ersteren drei Gleichungen kommen nur die Differenzen dieser Grössen vor, so dass der absolute Werth von einer derselben unbestimmt bleibt.

Man wird aber selten in den Fall kommen, nach dem absoluten Werth der Spannung zu fragen; in der Regel handelt es sich bloss um die Stromstärken, und diese werden durch die Grössen n allein bestimmt. Nun liefert der zweite Satz immer eine Gleichung weniger, als Werthe n zu bestimmen sind; die eine noch fehlende Gleichung erhalten wir, indem wir die Gleichungen, welche nach dem ersten Satze statthaben, alle addiren. Die Grössen m heben sich dann heraus, und wir finden

$$nl + n_1 l_1 + n_2 l_2 = A_t - B_t + B_{t_1} - C_{t_1} + C_{t_2} - A_{t_2}\,,$$

d. h. die Summe der Spannungsunterschiede zu beiden Seiten aller Löthstellen ist der Summe der elektromotorischen Kräfte des ganzen einfachen Umgangs entgegengesetzt gleich. Wir müssen nämlich beachten, dass nach dem oben Festgesetzten, wenn $\alpha\beta\gamma\alpha$ die positive Richtung des Stromes ist, die elektromotorische Kraft an der Stelle α den Werth $B_t - A_t$ besitzt, u. s. f.

Die Anwendung dieses Satzes in Verbindung mit dem zweiten liefert immer eben so viel von einander unabhängige lineare Gleichungen, als Grössen n zu bestimmen sind.

Indem wir in unserm Fall die Rechnung durchführen, nehmen wir der Einfachheit wegen an, es sei bloss eine der drei Löthstellen erwärmt; β und γ sollen dieselbe Temperatur t_0 haben, dagegen α die

Temperatur $t_0 + \tau$; ferner sei τ so klein, dass wir entwickeln und die höhern Glieder vernachlässigen können. Wir haben dann an der einen Stelle α die elektromotorische Kraft $(B' - A')\tau$.

Die Gleichungen zur Bestimmung der Grösen n sind

$$KQn = K_1 Q_1 n_1 = K_2 Q_2 n_2,$$
$$nl + n_1 l_1 + n_2 l_2 = (A' - B')\tau;$$

aus denselben folgen die Werthe:

$$n = \frac{1}{KQ} \cdot \frac{(A'-B')\tau}{\frac{l}{KQ} + \frac{l_1}{K_1 Q_1} + \frac{l_2}{K_2 Q_2}},$$
$$n_1 = \frac{1}{K_1 Q_1} \cdot \frac{(A'-B')\tau}{\frac{l}{KQ} + \frac{l_1}{K_1 Q_1} + \frac{l_2}{K_2 Q_2}},$$
$$n_2 = \frac{1}{K_2 Q_2} \cdot \frac{(A'-B')\tau}{\frac{l}{KQ} + \frac{l_1}{K_1 Q_1} + \frac{l_2}{K_2 Q_2}}.$$

Die Stromstärke j, welche in den drei Stücken denselben Werth besitzt, da die Strömung stationär sein soll, wird

$$j = -KQn = -K_1 Q_1 n_1 = -K_2 Q_2 n_2 = -\frac{(B'-A')\tau}{\frac{l}{KQ} + \frac{l_1}{K_1 Q_1} + \frac{l_2}{K_2 Q_2}}.$$

Vergleichen wir aber diese Formel mit derjenigen, welche wir Seite 41 erhalten haben, so finden wir vollständige Uebereinstimmung, wenn K die Leitungsfähigkeit bedeutet. Folglich ist K dieselbe Constante, welche wir oben mit diesem Namen bezeichnet haben.

§. 19.

Directer experimenteller Beweis der Ohmschen Gesetze durch Kohlrausch.

Die Giltigkeit des Ohmschen Gesetzes war in älterer Zeit nur durch Beobachtung der Stromstärke nachgewiesen. Kohlrausch*) hat das grosse Verdienst, die Spannungen unmittelbar gemessen zu haben, und wir wollen sein Verfahren ganz kurz angeben. Die Spannungen in einer Thermokette sind zu klein, um mit genügender Sicherheit bestimmt werden zu können; Kohlrausch hat deshalb eine Hydrokette benutzt.

In einen langen, mit Kupfervitriollösung gefüllten Kasten wurde eine Zink- und eine Kupferplatte eingesenkt; die Zinkplatte war von einem Thoncylinder umgeben, in welchem sich Zinkvitriollösung befand; wir brauchen dies bei Aufstellung der Formeln nicht weiter zu berücksichtigen. Ein dicker Kupferdraht verband die Zinkplatte mit dem Erdboden: ferner führte ein langer Schliessungsdraht zur Kupferplatte. Die Spannungen wurden gemessen an den Stellen α, β, γ

*) Kohlrausch. Pogg. Ann. 78. 1849.

des Schliessungsdrahtes, an den Stellen a, b, c, d der Flüssigkeit, endlich an der Stelle δ, wo der Schliessungsdraht mit der Kupferplatte in Verbindung stand.

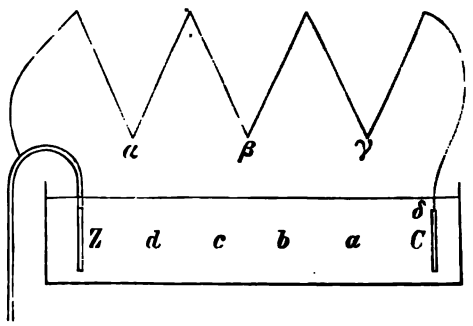


Fig. 23.

Die Spannung in der Zinkplatte sei u, in dem dicken Kupferdraht u_1, in dem Schliessungsdraht u_2, in der Kupferplatte u_3 und in der Flüssigkeit u_4. Die betreffenden Querschnitte wollen wir mit q, die Längen mit l, die Leitungsfähigkeiten mit k bezeichnen. Die Spannungszahlen seien Z für Zink, C für Kupfer und F für die Flüssigkeit; endlich sei S die Summe der elektromotorischen Kräfte:

$$S = Z - C + (C - F) + (F - Z),$$

wo die Klammern andeuten sollen, dass das Voltasche Spannungsgesetz nicht gelte.

Wir setzen:

$$u = m + nx,$$
$$u_1 = m_1 + n_1 x_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

u. s. w.

Die Gleichungen an den Grenzstellen lauten dann:

$$m_1 + n_1 l_1 = m_2,$$
$$m_2 + n_2 l_2 = m_3,$$
$$m_3 + n_3 l_3 = m_4 + (C - F),$$
$$m_4 + n_4 l_4 = m + (F - Z),$$
$$m + n l = m_1 + Z - C.$$

Wir haben ferner:

$$kqn = k_1 q_1 n_1 = k_2 q_2 n_2 = k_3 q_3 n_3 = k_4 q_4 n_4.$$

Endlich muss u_2 null sein für $x_2 = 0$; denn diese Stelle ist mit dem Erdboden leitend verbunden; folglich ist

$$m_2 = 0.$$

Bezeichnen wir noch mit W den Widerstand des ganzen einfachen Umganges, mit w den Widerstand des einzelnen Stückes,

$$W = w + w_1 + w_2 + w_3 + w_4,$$
$$w = \frac{l}{kq}, \qquad w_1 = \frac{l_1}{k_1 q_1}, \text{ u. s. w.},$$

so folgt aus den Gleichungen zunächst

$$n = \frac{1}{kq}\,\frac{S}{W}, \qquad n_1 = \frac{1}{k_1 q_1}\,\frac{S}{W}, \text{ u. s. w.,}$$

ferner

$$m_3 = \frac{w_3}{W}\,S,$$

$$m_4 = \frac{w_3 + w_3}{W}\,S - (C - F),$$

folglich

$$u_2 = S\,\frac{w_2}{W}\,\frac{x_2}{l_2},$$

$$u_3 = S\left(\frac{w_2}{W} + \frac{w_3}{W}\,\frac{x_3}{l_3}\right),$$

$$u_4 = S\left(\frac{w_2 + w_3}{W} + \frac{w_4}{W}\,\frac{x_4}{l_4}\right) - (C - F).$$

Nun hat Kohlrausch durch directe Messung die Spannungsdifferenz $Z - C$ bestimmt, und die Summe der beiden andern, so dass S gefunden war, auch die Widerstände gemessen. Daraus berechnete er die Spannung u_2 an verschiedenen Stellen des Schliessungsdrahtes und verglich diese Werthe mit den direct beobachteten Spannungen. Dies geschah für die Stellen α, β, γ, δ.

Ferner hat aber Kohlrausch auch die Spannung innerhalb der Flüssigkeit gemessen, und zwar auf dem folgenden Wege. Eine Kupfernadel, welche bis an die Spitze mit Lack überzogen war, wurde an einer bestimmten Stelle in die Flüssigkeit eingetaucht; die Nadel war mit der Platte des Elektroskops leitend verbunden; der Ausschlag entsprach also der Spannung an der Stelle der Flüssigkeit, wo die Spitze der Nadel sich befand. Allein es wurde so nicht die Spannung u_4 unmittelbar erhalten, sondern, weil zwischen der Flüssigkeit und dem Kupfer der Nadel wieder eine elektromotorische Kraft thätig ist, der Werth von

$$u_4 + (C - F) = S\left(\frac{w_2 + w_3}{W} + \frac{w_4}{W}\,\frac{x_4}{l_4}\right).$$

Folglich hebt sich die Grösse $(C - F)$ ganz heraus. Die Beobachtung fand an den vier ungefähr gleich weit von einander entfernten Stellen a, b, c, d der Flüssigkeit statt.

Wir geben die Zahlen, welche Kohlrausch gefunden hat; es sind die ersten Messungen zur directen Prüfung der Ohmschen Formeln.

	Berechnet.	Beobachtet.
α	0,93	0,85
β	1,86	1,85
γ	2,80	2,69
δ	3,73	3,70
a	4,80	5,03
b	5,86	5,99
c	6,91	6,93
d	7,98	7,96.

Bedenkt man die grossen Schwierigkeiten einer elektroskopischen Messung und die unvermeidlichen Fehler wegen der Aenderungen innerhalb der Kette und des Elektroskops, so ist die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen völlig genügend; die Ohmschen Gesetze sind also durch die Beobachtung als giltig erwiesen.

§. 20.

Die Gesetze der Stromtheilung.

Dieselben Grundsätze, welche die Spannungen in einem unverzweigten geschlossenen Leiter bestimmen, sind auch bei einer Stromtheilung zur Anwendung zu bringen.

Der allgemeine Fall wird durch ein bestimmtes Beispiel am Einfachsten deutlich. Wir nehmen wieder eine Thermokette an, die aus den drei Metallen A, B, C mit den Löthstellen α, β, γ bestehe; ausserdem seien aber die beiden Löthstellen β und γ noch durch ein weiteres Leiterstück C_1 verbunden. Die Löthstelle α werde auf der Temperatur $t + \tau$ erhalten, dagegen die beiden anderen Löthstellen β und γ auf der Temperatur t, so dass nur an der Stelle α eine elektromotorische Kraft auftritt, und zwar von der Grösse $(B' - A')\tau$. Man nennt dann den Theil AB den Stammstrom, die Theile C und C_1 die beiden Zweigströme.

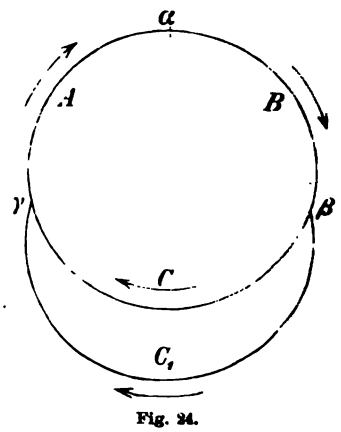


Fig. 24.

Wir nehmen in jedem einzelnen Stück die x vom Anfang zum Ende positiv in der Richtung der Pfeile. Wir nennen ferner die Längen der Stücke A und B, L und L_1, der Stücke C und C_1, l und l_1, die Spannungen U, U_1, u, u_1, die Querschnitte Q, Q_1, q, q_1, die Leitungsfähigkeiten K, K_1, k, k_1. Es wird dann

$$U = M + Nx, \qquad u = m + nx,$$
$$U_1 = M_1 + N_1 x, \qquad u_1 = m_1 + n_1 x.$$

Wir bringen zunächst wieder den ersten der beiden oben ausgesprochenen Sätze zur Anwendung, in genau derselben Form:

Der Unterschied der Spannungen zu beiden Seiten einer Löthstelle ist gleich dem Unterschied der Spannungszahlen.

Zu diesem Ende machen wir zwei einfache Umgänge ABC und ABC_1. Wir finden dann bei dem ersten

$$\begin{aligned} M + NL - M_1 &= A_{t+\tau} - B_{t+\tau}, \\ M_1 + N_1 L_1 - m &= B_t - C_t, \\ m + nl - M &= C_t - A_t, \end{aligned}$$

bei dem zweiten

$$\begin{aligned} M + NL - M_1 &= A_{t+\tau} - B_{t+\tau}, \\ M_1 + N_1 L_1 - m_1 &= B_t - C_{1t}, \\ m_1 + n_1 l_1 - M &= C_{1t} - A_t. \end{aligned}$$

Hätten wir noch einen dritten, vierten Zweig u. s. w., so müssten wir einen dritten, vierten Umgang machen, und wir erhielten ein drittes, viertes System Gleichungen. Im Allgemeinen entspricht die Anzahl der Systeme der Anzahl von verschiedenen Wegen, auf denen man von einem bestimmten Punkt aus zu demselben zurückgelangen kann, ohne bei einem einzelnen dieser Wege ein Stück zweimal zu durchlaufen. Bei der Berechnung wird man nicht alle diese Umgänge machen; sondern man schreibt die Gleichungen für jede Uebergangsstelle unmittelbar hin. Man muss im Allgemeinen an jeder Stelle, wo n Leiterstücke zusammenstossen, $(n-1)$ Gleichungen erhalten.

Ebenso können wir auch den zweiten Satz zur Anwendung bringen:

In jede Löthstelle muss ebensoviel Elektricität einströmen, als von ihr ausströmt.

Dies giebt in unserm Falle

$$-KQN = -KQ_1 N_1 = -kqn - k_1 q_1 n_1;$$

mit den Bedingungen an den Löthstellen α und β ist die an der Löthstelle γ gleichzeitig erfüllt. Wir erhalten demnach eine Gleichung weniger, als Löthstellen vorhanden sind.

Bezeichnen wir aber die Stromstärken in den vier Stücken mit J, J_1, j und j_1, so stellen sich die letzten beiden Gleichungen in der Form dar

$$J = J_1 = j + j_1,$$

so dass wir zwei Gleichungen zur Bestimmung dieser vier Grössen haben.

Die beiden noch fehlenden Gleichungen liefern uns die Systeme Gleichungen, die wir für die beiden einfachen Umgänge erhalten haben. Indem wir nämlich in jedem System die Gleichungen addiren, folgt

$$\begin{aligned} NL + N_1 L_1 + nl &= A_{t+\tau} - B_{t+\tau} + B_t - C_t + C_t - A_t, \\ NL + N_1 L_1 + n_1 l_1 &= A_{t+\tau} - B_{t+\tau} + B_t - C_{1t} + C_{1t} - A_t. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$N = -\frac{J}{KQ}, \qquad N_1 = -\frac{J_1}{K_1 Q_1}, \qquad n = -\frac{j}{kq}, \qquad n_1 = -\frac{j_1}{k_1 q_1};$$

ferner steht rechts in den beiden Gleichungen die negative Summe der elektromotorischen Kräfte von den beiden einfachen Umgängen; diese Summe sei S, so dass

$$S = B_{t+\tau} - A_{t+\tau} - B_t + A_t = (B' - A')\tau;$$

dann können wir die Gleichungen in der Form schreiben:

$$J\frac{L}{KQ} + J_1\frac{L_1}{K_1Q_1} + j\frac{l}{kq} = S,$$

$$J\frac{L}{KQ} + J_1\frac{L_1}{K_1Q_1} + j_1\frac{l_1}{k_1q_1} = S.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen enthalten so viel Glieder, als die einfachen Umgänge Leiterstücke; jedes Glied ist gleich dem Product der Stromstärke in den Widerstand des betreffenden Leiterstückes; nennen wir also diese Widerstände W, W_1, w, w_1, so erhalten wir:

$$JW + J_1W_1 + jw = S,$$

$$JW + J_1W_1 + j_1w_1 = S.$$

Wir haben damit den folgenden Satz gefunden:

In jedem einfachen Umgang ist die Summe von den Producten der Stromstärken in die Widerstände der einzelnen Leiterstücke gleich der Summe von den elektromotorischen Kräften des einfachen Umgangs.

Dieser Satz trägt den Namen von Kirchhoff, welcher die vorliegende Aufgabe zuerst allgemein gelöst hat.

In der Regel handelt es sich bloss um Bestimmung der Stromstärken; dann liefert der Kirchhoffsche Satz in Verbindung mit dem vorhergehenden, dass an jeder Löthstelle eben soviel Elektricität einwie ausströmen muss, die genügende Anzahl von Gleichungen. Bei der Anwendung ist in jedem einzelnen Leiterstück die eine Richtung als die der positiven Strömung festzusetzen, so dass in dem betreffenden Stück die Stromstärke einen positiven oder negativen Werth erhält, je nachdem die Strömung in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung stattfindet; wird ein einfacher Umgang betrachtet, so muss in dem einzelnen Stück die Stromstärke j mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen werden, je nachdem bei dem einfachen Umgang das betreffende Stück in der positiven oder negativen Richtung durchlaufen wird. In dem oben betrachteten besondern Falle können wir z. B. auch den einfachen Umgang $\beta C\gamma C_1\beta$ betrachten; wir finden dann die Gleichung

$$jw - j_1w_1 = 0,$$

welche aus den beiden oben aufgestellten durch Subtraction folgt.

Wir führen in diesem Falle die Berechnung der Stromstärken völlig aus. Die Gleichungen sind

$$J = J_1 = j + j_1,$$

$$JW + J_1W_1 + jw = S,$$

$$JW + J_1W_1 + j_1w_1 = S.$$

Folglich

$$J(W+W_1)\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1}\right)+j+j_1=S\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1}\right);$$

oder

$$J=J_1=\frac{S}{W+W_1+\frac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1}}},$$

$$j=\frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1}}J,$$

$$j_1=\frac{\frac{1}{w_1}}{\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1}}J.$$

Hätten wir statt zweier Zweige von β nach γ eine beliebige Anzahl von solchen, so wäre in dem für J gefundenen Werthe

$$\frac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1}} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}+\cdots}$$

zu ersetzen. Wir wollen diesen Ausdruck mit W' bezeichnen. Wir erhalten dann für J denselben Werth, wenn wir die Zweige zwischen β und γ durch ein einfaches Leiterstück von dem Widerstand W' ersetzen; man nennt daher den Ausdruck

$$W+W_1+W'$$

den Gesammtwiderstand, und die Stromstärke im Stammstrom ist gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte dividirt durch diesen Gesammtwiderstand. Ferner wird die Stromstärke j in einem der Zweige

$$j=\frac{W'}{w}J,$$

also gleich der Stromstärke im Stammstrom, multiplicirt mit dem reciproken Widerstand des Zweiges, dividirt durch die Summe von den reciproken Widerständen aller Zweige.

Man kann mittelst der beiden Sätze die complicirtesten Fälle von Stromtheilung ohne Schwierigkeit behandeln; das einfache Beispiel mag genügen, da wir zu mannigfacher Anwendung Gelegenheit finden werden.

§. 21.

Anwendung von den Gesetzen der Stromtheilung. Methode von Becquerel zur Berichtigung des Multiplicators.

Zunächst betrachten wir zwei Methoden, welche zur Bestimmung der Multiplicatorfunction sind vorgeschlagen worden.

Um die Werthe der Function $F(\varphi)$ in der Gleichung

$$jF(\varphi)=H\sin\varphi,$$

die wir Seite 37 erhalten haben, für eine genügende Anzahl Argumente φ_1, φ_2 ... zu berechnen, hat Becquerel den folgenden Weg eingeschlagen.

Ein möglichst constanter Strom, am besten ein Thermostrom wird einmal ganz, dann nur zum $n$ten Theile durch den Multiplicator geleitet. Sind die Ablenkungen der Nadel in den beiden Fällen φ und und φ_n, so gelten die Gleichungen:

$$jF(\varphi) = H \sin \varphi ,$$

$$\frac{1}{n} jF(\varphi_n) = H \sin \varphi_n ;$$

folglich ist

$$F(\varphi_n) = n \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} F(\varphi) .$$

Die Theilung des Stromes wird durch Einschaltung von Drahtstücken erhalten, deren Widerstand bekannt ist. Es sei der Multiplicator aus einem Draht von bekannter Länge hergestellt; von demselben Draht seien ferner noch drei Stücke, alle von derselben Länge, abgeschnitten, so dass wir vier Leiterstücke von genau gleichem Widerstande w haben. Die Schliessung wird zuerst durch den Multiplicator allein hergestellt; der Widerstand ist dann gleich w, da der Widerstand in dem Thermoelement gegen den Widerstand des Multiplicators verschwindend klein ist; bezeichnet also K die elektromotorische Kraft des Elementes, so wird die Stromstärke

$$j = \frac{K}{w} .$$

Nun schalten wir nach und nach die drei andern Leiterstücke hinter einander in die Strombahn ein; dann werden die Stromstärken

$$j_2 = \frac{K}{w+w} = \frac{1}{2} j ,$$

$$j_3 = \frac{K}{w+2w} = \frac{1}{3} j ,$$

$$j_4 = \frac{K}{w+3w} = \frac{1}{4} j .$$

Endlich schalten wir erst zwei und dann die drei Drahtstücke neben einander in die Strombahn ein; dann finden wir

$$j_5 = \frac{K}{w + \frac{1}{\frac{1}{w} + \frac{1}{w}}} = \frac{2}{3} j ,$$

$$j_6 = \frac{K}{w + \frac{1}{\frac{3}{w}}} = \frac{3}{4} j .$$

In der Regel werden die sechs verschiedenen Werthe der Stromstärke genügen; man kann ja auch noch durch Benutzung mehrerer Thermo-

elemente oder durch verschiedene Erwärmung der Löthstellen den ursprünglichen Werth j verändern.

§. 22.

Der Differentialmultiplicator. Neumanns Methode zur Berichtigung desselben.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Multiplicatorfunction beruht auf der Anwendung eines sogenannten Differentialmultiplicators; dieser Apparat ist zu manchen Zwecken mit grossem Vortheil zu benutzen. Statt des einen sind zwei Drähte isolirt neben einander aufgewunden, und es kommt darauf an, dass die beiden Drähte dieselbe Länge, denselben Widerstand und genau dieselbe Lage gegen die Magnetnadel haben. Die Ablenkung der Nadel muss dieselbe sein, mag der Strom durch den einen oder durch den andern Draht geleitet werden. Zu dem Ende hat Becquerel, von welchem der Grundgedanke herrührt, die beiden Drähte sehr sorgfältig den einen parallel dem andern um die Multiplicatorrolle gewickelt. Der Zweck lässt sich so wohl erreichen, wenn man nur eine Lage windet; will man aber die Wirkung verstärken und mehrere Lagen über einander anbringen, so gerathen die beiden Drähte sehr leicht aus einander. Man thut daher gut, zuerst die beiden Drähte zusammenzuflechten, wie die beiden Stränge in einem Bindfaden, und dann erst die Schnur auf die Rolle zu wickeln; so wird das gewünschte Ziel ganz sicher erreicht. Die Drähte müssen aber völlig isolirt sein; wenn sie bloss mit Seide umwunden sind, so wird durch das Flechten leicht der Ueberzug verschoben und die Isolirung aufgehoben; man vermeidet das vollständig, wenn man die übersponnenen Drähte lackirt, und so lange der Lack noch weich ist, die Umwindung ausführt; der Lack hält dann die Seide fest. Wenn nach ein paar Tagen der Lack trocken ist, so erweisen sich die Drähte völlig isolirt; die Probe hiefür ist, dass, wenn das eine Ende des einen und das andere Ende des andern Drahtes mit den Polen einer starken Säule verbunden werden, die Nadel völlig in Ruhe bleiben muss.

Ein solcher Differentialmultiplicator kann nun auf verschiedene Weise in den Strom eingeschaltet werden. In umstehender Figur (Fig. 25) seien die beiden Drahtwindungen schematisch durch ad, bc dargestellt; ferner soll der Draht A zu dem positiven, der Draht B zu dem negativen Pole einer Säule führen, so dass der Strom durch A ein- und durch B austritt; endlich laufe jeder dieser beiden Drähte in zwei Zweige α, β und γ, δ aus, durch welche die Verbindungen mit den Multiplicatordrähten hergestellt werden. Dies kann auf die folgenden vier verschiedenen Arten bewerkstelligt werden:

I.	II.	III.	IV.
$a\alpha$	$a\alpha$	$a\alpha$	$a\alpha$
$b\beta$	$b\gamma$	bd	$b\gamma$
$c\gamma$	$c\beta$	$c\gamma$	cd
$d\delta$	$d\delta$.		

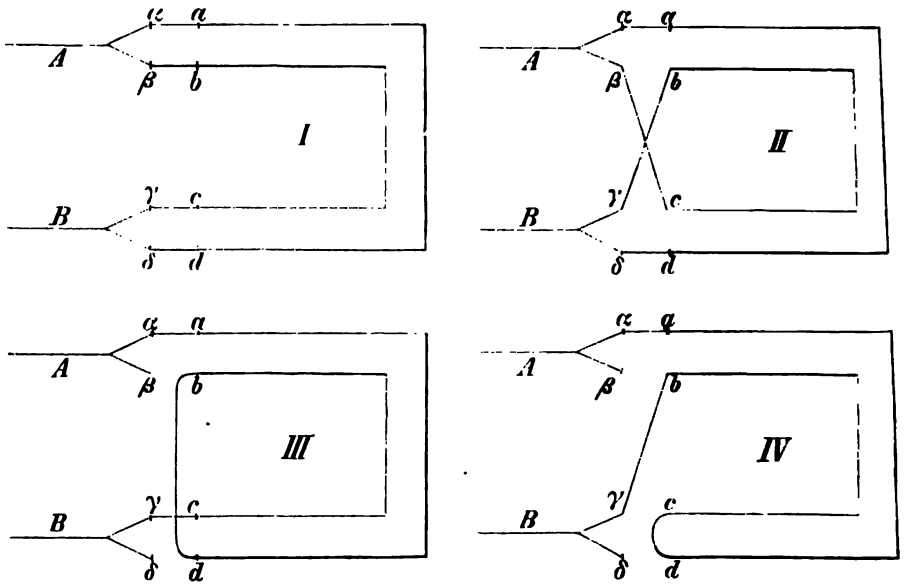


Fig. 25.

Im Falle I hat der Strom in den beiden Drähten dieselbe Richtung, im Falle II entgegengesetzte; im Falle III fliesst derselbe Strom in gleicher Richtung, im Falle IV in entgegengesetzter Richtung durch die beiden Drähte. Nehmen wir zunächst an, es seien die Multiplicatorfunctionen verschieden für die beiden Drähte F und F_1, so gelten in den vier Fällen Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && jF(\varphi) + j_1 F_1(\varphi) = H \sin \varphi,\\
&\text{II.} && jF(\varphi) - j_1 F_1(\varphi) = H \sin \varphi,\\
&\text{III.} && j\{F(\varphi) + F_1(\varphi)\} = H \sin \varphi,\\
&\text{IV.} && j\{F(\varphi) - F_1(\varphi)\} = H \sin \varphi;
\end{aligned}$$

der Ablenkungswinkel φ hat in den vier Fällen selbstverständlich verschiedene Werthe.

Der Fall IV dient zur Prüfung des Apparates; da muss φ null sein; sonst ist der Apparat nicht brauchbar. Es wäre ein grosser Zufall, wenn blos für $\varphi = 0$ $F(\varphi) - F_1(\varphi)$ null würde; um sich auch dagegen sicher zu stellen, kann man den Multiplicator aus dem Meridian herausdrehen um einen Winkel ψ; dann muss in der Gleichung

$$j\{F(\psi) - F_1(\psi)\} = H \sin \varphi$$

für jeden Werth von ψ $\varphi = 0$ sein.

Zur Bestimmung der Multiplicatorfunction benutzen wir die Combination II, geben aber den Verbindungsdrähten eine etwas andere Einrichtung. Der Draht A sei wie oben verzweigt, die beiden Zweige mit a und c verbunden; dagegen werde b mit d durch einen längern Draht verbunden, der von d_1 bis d_2 gespannt sei; auf diesem geraden Drahtstück soll das Ende von B verschiebbar und seine jedesmalige Stellung δ an einer Scale ablesbar sein. Bezeichnen wieder j und j_1 die Stromstärken in den beiden Zweigen $\alpha a d d_2 \delta$ und $\beta c b d_1 \delta$, J die Stromstärke im Stammstrom, so lautet die Gleichung II:

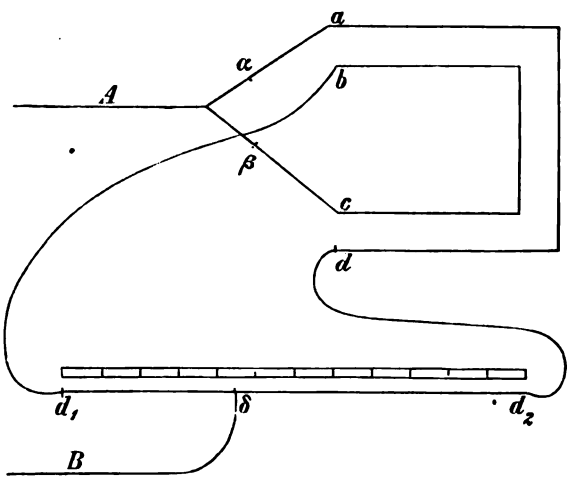


Fig. 26.

$$(j - j_1) F(\varphi) = H \sin \varphi.$$

Sind aber w und w_1 die Widerstände der beiden Zweige, so haben wir

$$j + j_1 = J,$$

$$jw - j_1 w_1 = 0;$$

folglich $$j = \frac{w_1}{w + w_1} J, \qquad j_1 = \frac{w}{w + w_1} J;$$

also gilt die Gleichung

$$J \frac{w_1 - w}{w_1 + w} F(\varphi) = H \sin \varphi.$$

Wir verschieben nun zuerst das Ende δ des Drahtes B auf dem Drahtstück $d_1 d_2$ so lange, bis φ verschwindet, also $w = w_1$ ist; durch passende Länge der Drähte βc und $d_1 d_2$ kann man immer erreichen, dass diese Stellung von δ ungefähr in der Mitte von $d_1 d_2$ liegt. Wird dann weiter δ um eine bestimmte Länge nach rechts verschoben, und ist der Widerstand dieser Länge u, eine leicht messbare Grösse, so wird w_1 um u vergrössert, w dagegen um u verringert. Die Nadel erleidet eine Ablenkung φ aus der Gleichgewichtslage, für welche die Geichung gilt

$$J \frac{2u}{w+w_1} F(\varphi) = H \sin \varphi;$$

folglich ist $$F(\varphi) = \frac{H}{J} \frac{w+w_1}{2u} \sin \varphi.$$

Die Grösse $w + w_1$ hat einen bestimmten constanten Werth und muss gemessen werden; ebenso der Widerstand einer gegebenen Länge des Messdrahtes $d_1 d_2$. Ferner muss die Stromstärke J im Stammstrom constant erhalten werden, und es darf während der Beobachtungen die erdmagnetische Kraft sich nicht ändern. Mindestens das Erstere, dass J sich nicht geändert habe, muss durch gleichzeitige Beobachtung der Stromstärke J mittelst einer Tangentenboussole controlirt werden; wenn sich aber die Säule ändert (und meistens wird das nicht zu vermeiden sein), so muss durch Aenderung des Widerstandes im Stammstrom die Stromstärke J desselben constant erhalten werden, und im Allgemeinen wird man den Widerstand so zu reguliren haben, dass das Verhältniss $\frac{H}{J}$ seinen Werth behält. Das ist erreicht, wenn die Ablenkung in der Tangentenboussole unverändert erhalten wird.

Nun wird die Multiplicatorfunction durch Aenderung von u, welche immer einer bestimmten Verschiebung von δ entspricht, nach und nach ermittelt; die Beobachtung erfordert vielleicht eine halbe Stunde Zeit, wenn alle Vorbereitungen getroffen sind. Innerhalb der ersten Grade ist $F(\varphi)$ nahe constant, vorausgesetzt dass die Windungen ganz regelmässig sind; die Nadel muss also an einem Rahmen angebracht sein, der die Windungen umgiebt; sonst treten gerade an der wichtigsten Stelle unregelmässige Aenderungen von $F(\varphi)$ ein.

Wir wollen noch zeigen, wie sehr schwache Ströme mittelst eines solchen Differentialmultiplicators können gemessen werden. Wir wenden dann die Combination I an; bisweilen ist die Combination III vortheilhafter; es hängt dies von dem Widerstand in den Elementen ab.

Wir stellen δ so ein, dass $w = w_1$; dann wird

$$j = j_1 = \frac{J}{2},$$

und da die Wirkungen sich addiren, lautet die Gleichung für die Ablenkung ψ

$$\frac{J}{2}\{F(\psi) + F_1(\psi)\} = J F(\psi) = H \sin \psi.$$

Verbinden wir dieses Resultat mit dem bei der Bestimmung der Multiplicatorfunction gefundenen, wonach

$$J_\tau F(\varphi) = H \frac{w+w_1}{2u} \sin \varphi,$$

so folgt: $$J = \frac{F(\varphi) \sin \psi}{F(\psi) \sin \varphi} \frac{2u}{w+w_1} J_\tau.$$

Die Stromstärke J_τ wird mittelst der Tangentenboussole direct gemessen

oder auch, auf dem früher angegebenen Wege, absolut bestimmt. Dann giebt die Gleichung den Werth von J in absolutem Maass.

Wir können u so wählen, dass $\varphi = \psi$ wird; die Messung von J setzt dann bloss die Bestimmung von J_r und u voraus, so dass wir die Ermittelung der Multiplicatorfunction nicht vorzunehmen brauchen. Dies ist insofern von Wichtigkeit, als im Lauf der Zeit Aenderungen des Multiplicators wohl eintreten können; man muss daher jedes Mal, wenn man die Werthe von $F(\varphi)$ zu Messungen benutzt, eine Ermittelung der Multiplicatorfunction vornehmen.

§. 23.

Ueber die beste Anordnung der Elemente zu einer Kette.

Eine dritte Anwendung von den Gesetzen der Stromtheilung machen wir zur Beantwortung der Frage, wie wir in einer Säule die einzelnen Elemente anzuordnen haben, damit die Stromstärke in einer Tangentenboussole oder in einem Galvanometer, überhaupt in dem Schliessungsdraht, den wir unverzweigt annehmen, die möglich grösste sei.

Man unterscheidet bei der Bildung einer Säule aus einer Anzahl von Elementen zwei Combinationen: man verbindet die Elemente entweder hinter einander zu einer Voltaschen Kette oder neben einander zu einer einfachen Kette. Seien z. B. drei Thermoelemente gegeben, welche aus einem Wismuth- und einem Kupferstück bestehen, so können wir entweder nach Volta immer ein Kupfer- mit einem Wismuthende verbinden und das letzte Wismuth- und Kupferende mit den beiden Enden des Schliessungsdrahtes, oder wir können zuerst alle Kupferenden unter sich, ebenso alle Wismuthenden unter sich verbinden und dann die Schliessung herstellen. Welche Combination liefert den stärkeren Strom im Schliessungsdraht?

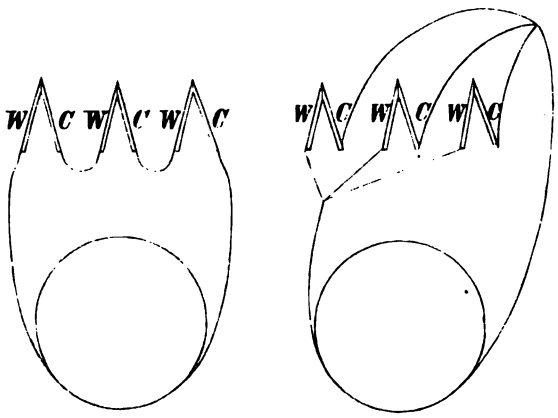


Fig. 27.

Wir nennen den Widerstand eines Elementes w, den Widerstand der Verbindungsdrähte v, den Widerstand des Schliessungsdrahtes R, die elektromotorische Kraft eines Elementes A, die Anzahl der Elemente n.

Werden die Elemente hinter einander eingeschaltet, so haben wir

einen einfachen Umgang und finden für die Stromstärke J_1

$$J_1\{nw + (n-1)v + R\} = nA$$

oder

$$J_1 = \frac{A}{w + v + \frac{R-v}{n}}.$$

Im zweiten Falle dagegen giebt es n einfache Umgänge, die gleich anzunehmen sind, und wir erhalten, wenn J_2 die Stromstärke im Schliessungsdraht, j die Stromstärke in den einzelnen Elementen, v' den Widerstand in den beiden Verbindungsdrähten bezeichnet,

$$J_2 = nj,$$

$$J_2 R + j(w + v') = A,$$

folglich

$$J_2 = \frac{A}{R + \frac{w+v'}{n}}.$$

In der Regel werden v und v' gegen w klein sein, und wir werden daher setzen können

$$J_1 = \frac{A}{w + \frac{R}{n}},$$

$$J_2 = \frac{A}{R + \frac{w}{n}},$$

wo w den Widerstand des einzelnen Elementes, etwa mit den dazu gehörigen Verbindungsdrähten, und R den Widerstand des langen Schliessungsdrahtes bezeichnet. Der Unterschied zwischen den beiden Werthen ist sehr in die Augen springend; in dem erstern Falle wird durch Vermehrung der Elemente gewissermaassen der Widerstand der Schliessung, in dem letztern Falle dagegen der Widerstand des Elementes verringert. Wir haben also die Elemente hinter einander einzuschalten, wenn $R > w$, neben einander, wenn $w > R$; dieser letztere Fall wird bei Hydroelementen meistens vorliegen, der erstere bei Thermoelementen, wo der Widerstand in dem einzelnen Element sehr klein ist; der Widerstand R der Schliessung wird sehr gross, wenn ein Wasserzersetzungsapparat eingeschaltet ist. Wie gross aber auch die Zahl der Elemente sein mag, immer bleibt

$$J_1 < \frac{A}{w} \quad \text{und} \quad J_2 < \frac{A}{R},$$

so dass der Verstärkung des Stromes durch Vermehrung der Elemente eine Grenze gesetzt ist, mag man nun die eine oder die andere Anordnung der Elemente wählen.

Unter Umständen kann es vortheilhaft sein, die beiden Anordnungen der Elemente zu combiniren; man verbindet eine Anzahl Elemente neben einander zu einer Gruppe und schaltet dann die Gruppen

hinter einander ein. Es fragt sich, wie viel solcher Gruppen man zu bilden hat bei gegebener Zahl der Elemente.

Es sei n diese Zahl, p die Anzahl der Gruppen, α die Anzahl Elemente in einer Gruppe, so dass

$$n = p\alpha .$$

Ferner bedeute J die Stromstärke im Schliessungsdraht, j die Stromstärke in dem einzelnen Element, R den Widerstand der Schliessung, w den Widerstand eines Elementes sammt dem der beiden Verbindungsdrähte in den Gruppen, welche alle gleich sein sollen, endlich v den Widerstand der Drähte, welche die Gruppen mit einander verbinden. Wir haben in jeder Gruppe α gleiche Wege neben einander; folglich ist

$$J = \alpha j .$$

Weiter folgt für einen der ganz gleichen einfachen Umgänge:

$$JR + pjw + (p-1)Jv = pA .$$

Demnach ergiebt sich

$$J = \frac{pA}{R + \frac{p}{\alpha} w + (p-1)v} .$$

Das Glied $(p-1)v$ im Nenner kann wohl immer vernachlässigt werden, so dass

$$J = \frac{pA}{R + \frac{p}{\alpha} w}$$

oder, da $\alpha = \frac{n}{p}$,

$$J = \frac{pA}{R + \frac{p^2}{n} w} .$$

Es ist derjenige Theiler p der ganzen Zahl n zu finden, für welchen J ein Maximum wird. Zu dem Ende betrachten wir p als eine stätig sich ändernde Grösse; dann folgt als Bedingung für das Maximum

$$R + p^2 \frac{w}{n} - 2p^2 \frac{w}{n} = 0$$

oder

$$p^2 = \frac{nR}{w} .$$

Man muss also für p denjenigen Theiler der Zahl n nehmen, welcher dem Werthe $\sqrt{\frac{nR}{w}}$ am nächsten kommt, und die Stromstärke J erreicht dann annähernd den Werth

$$J_M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{Rw}} A .$$

Auch hier bedarf es demnach, um die beste Anordnung der Elemente zu einer Säule zu finden, einer wenigstens angenäherten Kenntniss der Werthe von w und R. Die Stromstärke wächst dann proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Elemente.

II. Kapitel.

Ueber die Bestimmung der Constanten.

§. 24.

Uebersicht der Thatsachen. Unterschied zwischen Thermo- und Hydroströmen. Elektromotorische Kraft. Widerstand der Flüssigkeit. Uebergangswiderstand und Polarisation.

Wir untersuchen jetzt die Constanten eines elektrischen Stromes und geben die wichtigsten Methoden zur Bestimmung derselben an; diese Bestimmung ist bei den Thermoströmen verhältnissmässig leicht, bei den Hydroströmen dagegen schwieriger, aber auch um so interessanter.

Der Unterschied zwischen den beiden Arten von elektrischen Strömen erstreckt sich auf alle Momente. In den Hydroströmen ist die elektromotorische Kraft eine ganz andere, als in den Thermoströmen, namentlich eine viel zusammengesetztere; ferner spielt der Widerstand der Flüssigkeit, also eines Leiters zweiter Klasse, eine wesentliche Rolle; damit sind fortwährende Veränderungen der Flüssigkeit, mit diesen wieder Aenderungen an den Metallen untrennbar verbunden. Während in thermoelektrischen Strömen die Aenderungen meist kaum wahrnehmbar, immer ganz unwesentlich sind, können sie in Hydroströmen die Bewegung völlig aufheben; man begreift diese Erscheinungen unter dem Namen Polarisation. Endlich tritt in den Hydroströmen eine neue Art von Widerstand auf, beim Uebergang des Stromes von einem metallischen zu einem flüssigen Leiter, der sogenannte Uebergangswiderstand.

Wir gehen auf die eben genannten Punkte noch etwas näher ein.

Die elektromotorische Kraft ist in den Hydroketten niemals eine einfache, sondern immer zusammengesetzt, da einmal zwischen den Metallen, dann aber auch zwischen Metall und Flüssigkeit eine elektromotorische Wirkung stattfindet; wir haben z. B. bei einem Zinkkupferelement nach unserer Bezeichnung den Spannungsunterschied

$$Z - K + (F, Z) + (K, F).$$

Mit Sicherheit ist kein Fall constatirt, wo zwischen Metall und Flüssigkeit gar keine elektromotorische Kraft auftritt, und wir besitzen auch keine Mittel, die einzelnen Wirkungen von einander zu sondern. Gewöhnlich tritt zu den angegebenen noch eine vierte elektromotorische Kraft hinzu, die der Polarisation; sie vermindert immer den absoluten

Werth der Summe von den übrigen elektromotorischen Kräften; wir werden sie daher, wenn die eben genannte Summe positiv gerechnet wird, mit $-p$ bezeichnen. Es ist schwierig, diese Polarisation von den andern Wirkungen zu sondern; doch werden wir eine praktisch brauchbare Methode angeben.

Allerdings giebt es Mittel, die Polarisation sehr klein zu machen; vergleichen wir dann die elektromotorische Kraft eines Hydroelementes mit der eines Thermoelementes, wo der Temperaturunterschied an den beiden Löthstellen etwa 100^0 beträgt, so wird die erstere Kraft wohl 250 Mal so gross sein, als die letztere, und doch haben wir ein sehr kräftiges Thermoelement angenommen (Wismuth-Kupfer, 100^0, gegen ein Daniellsches Hydroelement).

Was den Widerstand betrifft, unterscheidet sich eine Hydrokette von den Thermoketten hauptsächlich darin, dass der Widerstand der Flüssigkeit gegen den des Metalles ausserordentlich gross ist. Der Widerstand einer gesättigten Kupfervitriollösung ist 6 800 000 mal so gross, als der des Kupfers, und doch haben wir einen guten Leiter zweiter Classe. Eine der bestleitenden Flüssigkeiten ist verdünnte Schwefelsäure; ihr Widerstand beträgt etwa $\frac{1}{12}$ von dem der Kupfervitriollösung; dagegen leitet diese noch besser, als Zinkvitriollösung. Reihen hieher gehöriger Bestimmungen sind von Horsford*) und Hankel**) angestellt; der letztere hat ein sehr überraschendes Resultat gefunden; während nämlich mit steigender Temperatur der Widerstand der Metalle zunimmt, vermindert sich dagegen der Widerstand der Flüssigkeiten.

Messen wir ferner für eine bestimmte Flüssigkeit den Widerstand bei verschiedenen Längen und verschiedenen Querschnitten der Flüssigkeitssäule, so ergeben sich Werthe von ganz anderer Form, wie bei einem metallischen Leiter. Sei l die Länge, q der Querschnitt der Flüssigkeitssäule, k das Leitungsvermögen der Flüssigkeit; dann wird der Widerstand

$$W = \frac{l}{kq} + U,$$

wo U bloss von der Stromstärke abhängt, dagegen von den Dimensionen der Flüssigkeit ganz unabhängig ist. Man bezeichnet dieses Glied mit dem Namen Uebergangswiderstad, indem angenommen wird, es rühre dieses Glied von einem besondern Hinderniss her, welches der Strom beim Eintritt in die Flüssigkeit und beim Austritt aus derselben zu überwinden habe. Im Allgemeinen wird U um so kleiner, je grösser die Stromstärke ist.

*) Horsford. Pogg. Ann. 70.
**) Hankel. Pogg. Ann. 69.

Da das Leitungsvermögen der Flüssigkeiten so gering ist, trifft man immer eine solche Einrichtung, dass der Querschnitt der leitenden Flüssigkeitssäule möglichst gross wird; man giebt also den in die Flüssigkeit eingetauchten Metalltheilen die Form von Platten.

Ferner ändert sich der Widerstand einer Flüssigkeit fortwährend; dies rührt daher, dass. sobald ein Strom durch die Flüssigkeit geht, immer chemische Zersetzungen eintreten; ein Metall bleibt dagegen beim Durchgang eines elektrischen Stromes ungeändert. Um dieses entgegengesetzte Verhalten zu erklären, nimmt man an, in einem Leiter erster Classe ströme die Elektricität von einem Molecül zum andern, während in einem Leiter zweiter Classe die Bestandtheile der Molecüle an der Bewegung der Elektricität theilnehmen sollen. Die anschaulichste Vorstellung ist die von Grotthuss entwickelte.

Es sei eine Wassersäule in den Strom eingeschaltet. In jedem Wassermolecül befindet sich ein Theil Sauerstoff, ein Theil Wasserstoff; in der Verbindung habe der Wasserstoff einen Ueberschuss von positiver, der Sauerstoff von negativer Elektricität. Durch Näherung eines Metalles wird der positiv geladene Wasserstoff nach der einen, der negativ geladene Sauerstoff nach der entgegengesetzten Seite getrieben. Dies wird in der Zeichnung angedeutet; es befinde sich links ein positiv, rechts ein negativ geladenes Metall, etwa links Zink und rechts Kupfer. Durch diese Orientirung der Molecüle wird der Strom

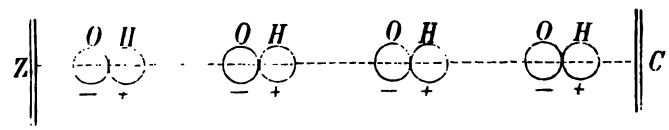


Fig. 28.

eingeleitet. Nun trennen sich die Bestandtheile; links verbindet sich positive Elektricität aus dem Zink mit der negativen des Sauerstoffs, und es wird unelektrischer Sauerstoff frei, während der positiv geladene Wasserstoff sich mit dem negativ geladenen Sauerstoff des rechts zunächst liegenden Wassermolecüls verbindet, u. s. f. Der Vorgang pflanzt sich durch die ganze Reihe von Molecüle fort bis zum negativen Pol; dort wird ein Theilchen Wasserstoff frei; seine positive Ladung wird durch aus dem Kupfer strömende negative Elektricität neutralisirt; es findet also am Kupfer eine Abscheiduug von unelektrischem Wasserstoff statt.

Mag nun diese Vorstellung begründet sein oder nicht, jedenfalls stellt sie den Hergang einfach dar. Es wird Flüssigkeit zerlegt; der eine Bestandtheil, der sogenannte elektronegative, wird an der positiven Elektrode oder Anode, wo der Strom in die Flüssigkeit eintritt, ausgeschieden, der andere elektropositive an der negativen Elektrode oder

Kathode. Wie Wasser in Sauerstoff und Wasserstoff, so zerfällt jede andere chemisch zusammengesetzte Flüssigkeit in ihre beiden Bestandtheile.

Ein ähnlicher Hergang muss auch in dem Hydroelement platzgreifen, wo der Strom entsteht. Eine Zink- und eine Kupferplatte seien metallisch verbunden und in reines Wasser eingetaucht. Auch hier wird Wasser zersetzt; aber während der Wasserstoff sich am Kupfer entwickelt, wird der am Zink ausgeschiedene Sauerstoff nicht frei; sondern er verbindet sich mit dem Zink zu Zinkoxyd. Allmählich wird das Zink von einer Zinkoxydschicht bedeckt, und da Zinkoxyd sehr schlecht leitet, wird der Strom immer mehr geschwächt, bis er endlich ganz aufhört.

Das wird verhütet, indem man dem Wasser Schwefelsäure zufügt; die verdünnte Schwefelsäure leitet einmal besser, als reines Wasser, und dann löst sie das Zinkoxyd auf, sowie dasselbe sich bildet. Aber nun bildet sich nach und nach eine Zinkvitriollösung, die schlechter leitet, als verdünnte Schwefelsäure, und der Strom nimmt ab. Schliesslich ist alle Schwefelsäure aufgezehrt, und die Metalle tauchen in verdünnte Zinkvitriollösung, die etwa 20 Mal so schlecht leitet, wie verdünnte Schwefelsäure. Aber noch ein anderer Hergang greift platz; nicht nur Wasser wird zersetzt, sondern auch Zinkvitriollösung. Und zwar wird diese folgendermassen zerlegt: Am Zink wird Sauerstoff und Schwefelsäure ausgeschieden, die mit dem Zink der Elektrode wieder Zinkvitriol geben, am Kupfer dagegen metallisches Zink, welches sich regulinisch an dem Kupfer absetzt. Dadurch entsteht eine neue elektromotorische Wirkung.

Die Kupferplatte ist zum Theil mit Zink belegt; diese Theile werden zunächst gegen die Zinkelektrode unwirksam, und wenn die Kupferplatte ganz mit Zink belegt ist, so findet eine elektromotorische Wirkung nicht mehr statt. Bevor aber dieser Endzustand erreicht ist, müssen Ströme entstehen, die von der Zinkbelegung durch die Flüssigkeit nach blanken Theilen der Kupferplatte und von da durch das Kupfer zu der Zinkbelegung zurückgehen. Diese secundären Ströme haben im Kupfer dem Hauptstrom entgegengesetzte Richtung; der letztere wird also geschwächt. Es sind das eben diejenigen Vorgänge, welche mit dem Namen Polarisation bezeichnet werden.

Ganz dieselbe Rolle, wie in dem besprochenen Falle das Zink, spielen in andern Fällen all die Stoffe, welche an der Kupferplatte ausgeschieden werden; so lagert sich der Wasserstoff des Wassers an der Kupferplatte ab und übt eine ähnliche Wirkung aus, wie das Zink der Zinkvitriollösung. An der positiven Zinkplatte sind die Verhältnisse einer Polarisation weniger günstig; der Sauerstoff wird zur Oxydation verbraucht und dadurch weggeschafft.

Zu diesen Polarisationserscheinungen steht der eben genannte

Uebergangswiderstand in der engsten Beziehung; das wird durch die folgende Betrachtung deutlich.

Wir nehmen zuerst eine einfache Kette an, in welcher weder eine Polarisation, noch ein Uebergangswiderstand auftreten soll. Bezeichnet dann A die elektromotorische Kraft und W den Widerstand des einfachen Umgangs, so wird die Stromstärke

$$J = \frac{A}{W}.$$

Findet aber eine Polarisation statt, so kommt zu der positiv angenommenen elektromotorischen Kraft A ein zweites negatives Glied $-p$ hinzu, und wenn auch ein Uebergangswiderstand auftritt, so wird W um ein zweites positives Glied U vermehrt; es folgt also

$$J = \frac{A-p}{W+U}.$$

Wir werden nun sehen, dass bei allen Messmethoden der Werth des Zählers gesondert bestimmt wird, und ebenso der des Nenners. Hienach würde einmal die elektromotorische Kraft mit Abzug der Polarisation, dann der Widerstand im engern Sinne zusammen mit dem Uebergangswiderstand bestimmt. Allein dieser Schluss ist an die Voraussetzung geknüpft, dass die Werthe der Polarisation p und des Uebergangswiderstandes U von der Stromstärke unabhängig seien.

Diese Annahme steht aber mit der Erfahrung in Widerspruch. Die Polarisation nimmt mit wachsender Stromstärke jedenfalls zu, und man wird in manchen Fällen setzen können:

$$p = p_0 + p_1 J,$$

wo p_0 und p_1 positive Constanten sind; wir haben dann

$$J = \frac{A-p_0-p_1 J}{W+U},$$

und wenn wir diese Gleichung auf die Ohmsche Form bringen, so ergiebt sich

$$J = \frac{A-p_0}{W+U+p_1}.$$

Hienach wird nicht bloss der Werth des Zählers, sondern auch der des Nenners durch die Polarisation bedingt.

Aber es wäre ferner die Annahme, dass U von der Stromstärke unabhängig sei, eine wenig gerechtfertigte; aus gewissen Beobachtungen muss man vielmehr schliessen, dass U mit wachsender Stromstärke abnehme, und zwar wird man die Abhängigkeit etwa durch die Gleichung darstellen können

$$U = U_0 + \frac{U_1}{J},$$

wo U_0 und U_1 von der Stromstärke unabhängig sind. Setzen wir auch noch diesen Werth in die ursprüngliche Gleichung ein, so erhalten wir schliesslich die Formel

$$J = \frac{A - p_0 - U_1}{W + U_0 + p_1}.$$

Also kommen die beiden Erscheinungen der Polarisation und des Uebergangswiderstandes im Zähler und im Nenner gemischt vor. Da aber die Messungen nur den Werth des ganzen Zählers und den des ganzen Nenners geben, wird eine strenge Sonderung der beiden Erscheinungen nicht möglich.

Gestützt auf die Form der Endgleichung haben manche Physiker die Ansicht vertreten, dass ein Uebergangswiderstand gar nicht vorhanden sei, und dass die Aenderungen in Zähler und Nenner der Ohmschen Gleichung durch die Polarisation allein zu erklären seien; in neuerer Zeit ist aber diese Ansicht meist wieder aufgegeben worden. Sie hat, vom rein mathematischen Standpunkt betrachtet, eine gewisse Berechtigung, weil die eine Ursache zur Erklärung der Thatsachen ausreicht; allein in physikalischer Hinsicht findet zwischen den beiden Ursachen ein gewaltiger Unterschied statt, indem die Polarisation eine activ wirkende Kraft ist, der Uebergangswiderstand nur ein passives Hinderniss bildet. Wir werden später einen Weg angeben, der die beiden Grössen p und U, jede für sich, zu bestimmen gestattet, und der wesentlich auf der activen Natur der Polarisation p beruht.

§. 25.

Constante Ketten. Nachweis des Polarisationsstromes.

Werden nicht besondere Vorkehrungen getroffen, so tritt in einer Hydrokette rasch eine grosse Schwächung des Stromes ein, namentlich durch Polarisation an der negativen Elektrode. Doch hat man jetzt Mittel gefunden, auch diese möglichst zu verhindern, und gewinnt so Ketten, welche lange Zeit constante Ströme liefern. Es sind das die sogenannten constanten Ketten. Man benutzt hauptsächlich drei Elemente; immer kommen zwei Flüssigkeiten zur Anwendung.

Das Daniellsche Element ist aus Zink, verdünnter Schwefelsäure, Kupfervitriollösung und Kupfer zusammengesetzt. In einem porösen Thonbecher, der mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt ist, steht ein amalgamirter Zinkcylinder; der Thonbecher wird in ein Glasgefäss eingetaucht, welches Kupfervitriollösung enthält, und mit einem cylindrischen Mantel von Kupferblech umgeben; durch metallische Verbindung des Zinkes mit dem Kupfer wird der Strom geschlossen; er geht vom Zink durch die Flüssigkeiten zum Kupfer und von da durch die Schliessung zum Zink zurück. Am Kupfer wird Kupferoxyd und Wasserstoff ausgeschieden; der letztere reducirt das erstere, und es wird regulinisches Kupfer niedergeschlagen und Wasser gebildet.

In dem Groveschen Element ist das negative Metall Platin,

welches in concentrirte Salpetersäure eitaucht; das positive Zink bleibt von verdünnter Schwefelsäure umgeben. Das Element ist viel stärker, als das Daniellsche; das Zink wird wieder allmählich in der Schwefelsäure gelöst; an der negativen Elektrode aber wird die Salpetersäure reducirt, und es entweichen untersalpetersaure Dämpfe, was sehr störend ist.

Das theure Platin wird in dem Bunsenschen Element durch Kohle ersetzt; am Besten wird ein Gemenge von Backkohle und Coaks durch Glühen festgemacht; die Kohle kann dann auf der Drehbank bearbeitet werden.

Man kann das Auftreten von Polarisationsströmen direct nachweisen. Es sei in die Kette eine Wasserzersetzungszelle eingeschaltet, ein Gefäss mit angesäuertem Wasser, in welches zwei Platten a und b von ganz homogenem reinem Platin eintauchen; ferner ist eine Nebenschliessung mit dem Multiplicator M angebracht, welche in β, wie der Hauptstrom in α, kann unterbrochen werden. Ist die Leitung bei α unterbrochen, bei β geschlossen, so darf in dem Multiplicator kein Strom fliessen. Nun wird die Leitung bei β geöffnet, bei α geschlossen; wir lassen den Strom eine Zeitlang durch die Zersetzungszelle gehen; dann wird gleichzeitig die Leitung bei α unterbrochen und bei β geschlossen. Man beobachtet einen starken Ausschlag der Nadel; es fliesst ein Strom durch den Multiplicator, und zwar hat derselbe immer eine solche Richtung, dass der Polarisationsstrom in der Flüssigkeit dem Hauptstrom entgegen fliesst. Die Stärke dieses Polarisationsstromes nimmt aber sehr rasch ab, so dass keine der oben genannten Messmethoden anwendbar ist; die Bestimmung muss daher auf einem andern Wege vorgenommen werden, und wir kommen darauf zurück.

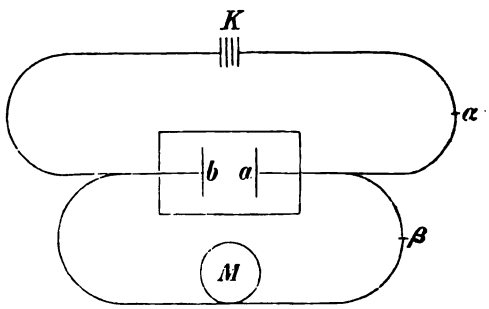


Fig. 29.

In sehr vielen Fällen, wo deutliche Polarisation stattfindet, kann die Ursache der Gegenströmung nicht näher angegeben werden; es finden keine direct nachweisbaren Aenderungen an den Metalloberflächen statt.

Auch in Thermoelementen ist eine Art Polarisation von Peltier entdeckt worden. Er schaltete in einen starken Strom drei Metallplatten ein; die äussern bestanden aus Wismuth, die mittlere aus Antimon; die Schliessung wurde mittelst Kupferdraht hergestellt, eben-

so, wie oben, eine Nebenschliessung mit Multiplicator angebracht. Nachdem der Hauptstrom eine Zeitlang durch die Platten geflossen war, wurde die Leitung bei α unterbrochen, bei β geschlossen; dann zeigte der Multiplicator einen rasch abnehmenden Strom an, dessen Richtung in den Platten dem Hauptstrom entgegengesetzt war; es hat also eine thermoelektrische Polarisation stattgefunden.

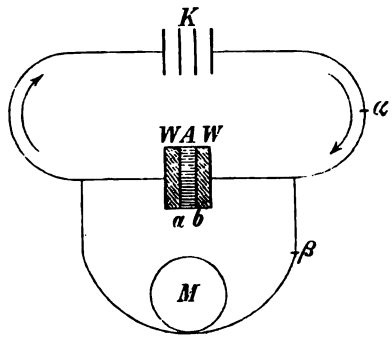


Fig. 30.

Der Grund liegt, wie Peltier nachgewiesen hat, darin, dass durch den Hauptstrom eine Temperaturerhöhung in der Grenzfläche *a* und eine Temperaturerniedrigung in der Grenzfläche *b* stattgefunden hat; da die Thermoströmung vom Wismuth durch die warme Löthstelle zum Antimon geht, sind die Temperaturänderungen derart, dass der Polarisationsstrom dem Hauptstrom entgegen fliesst. Dasselbe gilt in allen ähnlichen Fällen; es bildet sich immer eine Gegenströmung. Wie ferner Antimon und Wismuth bei Erwärmung der Löthstelle den stärksten Thermostrom erzeugen, so tritt auch die stärkste thermoelektrische Polarisation an der Grenze dieser beiden Metalle auf. Wir haben genau das entgegengesetzte Verhalten in den beiden Fällen; aber die Ursache dieser sehr merkwürdigen Erscheinung liegt noch ziemlich im Dunkeln.

§. 26.

Der Rheostat.

Indem wir uns nun zu den Methoden wenden, die zur Messung der Constanten von elektrischen Strömen dienen, brauchen wir unumgänglich ein Instrument, welches den Widerstand continuirlich zu vermehren oder zu vermindern gestattet.

Handelt es sich bloss darum, den Widerstand um kleine Grössen zu ändern, so genügt eine Einrichtung, wie wir sie oben schon beim

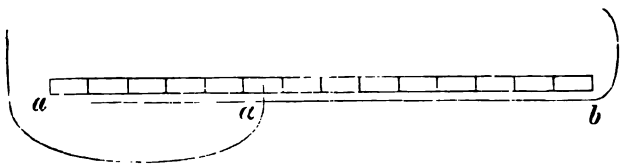


Fig. 31.

Differentialgalvanometer angewendet haben. Man spannt einen Messdraht *ab* von bekanntem Widerstand neben einem Maassstab auf, ver-

bindet ein Ende des Schliessungsdrahtes mit b und verschiebt das andere α auf dem Drahte ab.

Allein sehr oft muss der Widerstand bedeutend vermehrt oder vermindert werden, und hierzu dient der von Wheatstone vorgeschlagene Rheostat. Man fertigt sich einen isolirenden Cylinder an, am Besten von Metall, welches man mit Gips und schliesslich mit Seidenzeug überzieht; Holzcylinder ändern sich zu leicht. Auf dem Cylinder wird ein Messdraht spiralförmig aufgewunden; das eine Ende desselben ist mit der Axe leitend verbunden, das andere Ende isolirt. Ferner ist eine Vorrichtung getroffen, dass ein beliebig langes Stück von dem Messdraht in die Schliessung kann eingeschaltet und die Länge dieses Stückes abgelesen werden. Zu dem Ende ist der Cylinder um eine horizontale Axe drehbar, und ein Metallhammer wird durch eine Feder seitlich gegen eine Stelle des Drahtes gedrückt; indem man den einen Pol der Säule mit der Axe, den andern mit dem Hammer leitend verbindet, wird ein bestimmtes Stück des Drahtes in die Schliessung eingeschaltet. Wird der Cylinder gedreht und der Hammer verschoben, so ändert sich die Länge des eingeschalteten Drahtes, und man kann aus der Drehung und Verschiebung, welche direct beobachtet werden, die Aenderung der eingeschalteten Drahtlänge unmittelbar bestimmen.

§. 27.

Vier Methoden zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der verschiedenen Messmethoden, vorerst derjenigen, welche die elektromotorische Kraft bestimmen. Wir geben hier deren fünf an; eine sechste wollen wir erst erörtern, wenn es sich um eine Bestimmung der Polarisation handelt.

1) Die älteste Methode ist die von Ohm. Es muss die Stromstärke gemessen werden, etwa mittelst einer Tangentenboussole, oder wenn die Ströme zu schwach sind, mittelst eines Galvanometers.

Bezeichnet J die Stromstärke, A die zu bestimmende elektromotorische Kraft, W den wesentlichen Widerstand des Elementes und R den Widerstand der Schliessung, so ist

$$J = \frac{A}{W+R}.$$

Nun wird R um ϱ vermehrt; dadurch ändert sich die Stromstärke in J_1, wo

$$J_1 = \frac{A}{W+R+\varrho}.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$A = \frac{\varrho}{\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J}}.$$

Wir können uns die Stromstärken J und J_1 immer mittelst einer Tangentenboussole gemessen denken; denn wir haben oben die Mittel angegeben, um eine mittelst des Galvanometers gemessene Stromstärke durch eine andere auszudrücken, welche mittelst der Tangentenboussole gemessen ist. Nennen wir also die Stärke eines bestimmten Normalstromes J_0, so können wir J und J_1 durch J_0 ausdrücken, und wir haben

$$A = \frac{\varrho}{\frac{J_0}{J_1} - \frac{J_0}{J}} J_0.$$

Im Nenner steht eine Zahl; folglich wird A gleich dem Produkt eines Widerstandes in eine Stromstärke.

Wegen ihrer grossen Bequemlichkeit und Einfachheit wird diese Ohmsche Methode vielfach angewendet; doch hat sie einen grossen Nachtheil. In einem Zinkkupferelement z. B. ist die elektromotorische Kraft nach den früher gebrauchten Bezeichnungen

$$A = Z - K + (K,F) + (F,Z) - p,$$

und wir haben oben angenommen, es habe A in den beiden Fällen denselben Werth, obschon die Stromstärke verschieden ist. Nun ändert sich aber die Polarisation p merklich mit der Stromstärke; folglich hat A zwei verschiedene Werthe, und die Ohmsche Methode giebt uns bloss einen Mittelwerth zwischen den beiden. Derselbe Vorwurf trifft die drei folgenden Methoden; bloss die letzte ist frei davon.

2) Die Methode von Wheatstone setzt nur ein angebendes, kein messendes Galvanometer voraus und bestimmt bloss Verhältnisse von elektromotorischen Kräften, drückt also die gesuchte elektromotorische Kraft etwa durch die eines Normalelementes aus.

Es sei bei Einschaltung des Normalelementes, dessen elektromotorische Kraft A_0 und der wesentliche Widerstand W_0 sei, die Stromstärke

$$J = \frac{A_0}{W_0 + R};$$

dagegen gebe das zu bestimmende Element den Strom

$$J_1 = \frac{A}{W + R},$$

bei Anwendung derselben Schliessung. Nun wird in dem letztern Falle der Widerstand der Schliessung so lange geändert, bis die Stromstärke gleich J wird; das kann am Galvanometer beobachtet werden; die erforderliche Aenderung von R sei ϱ. Wir haben dann zweitens:

$$J = \frac{A}{W + R + \varrho}.$$

Weiter schalten wir den Widerstand $R + r$ in die Normalkette ein; die Stromstärke wird

$$J' = \frac{A_0}{W_0 + R + r}.$$

Endlich modificiren wir den Widerstand wieder so, dass auch das zu bestimmende Element einen Strom von der Stärke J' liefert, so dass

$$J' = \frac{A}{W + R + r + \varrho'},$$

wo ϱ' die erforderliche Aenderung von $R + r$ bezeichnet.

Aus den Gleichungen folgt

$$A\left(\frac{1}{J'} - \frac{1}{J}\right) = r,$$

$$A\left(\frac{1}{J'} - \frac{1}{J}\right) = r + \varrho' - \varrho;$$

also ist

$$A = \frac{r + \varrho' - \varrho}{r} A_0.$$

Die Grössen r, ϱ, ϱ' verhalten sich, wie die eingeschalteten Längen von dem Messdraht; diese Längen werden am Rheostaten abgelesen.

Die beiden folgenden Methoden sind von Fechner angegeben; sie setzen beide voraus, dass die Stromstärke gemessen werde.

3) Die erste Fechnersche Methode vergleicht die elektromotorischen Kräfte zweier Elemente, indem dieselben hinter einander in die Kette eingeschaltet werden, einmal so, dass die elektromotorischen Kräfte zusammenwirken, das andre Mal so, dass sie einander entgegenwirken. Die elektromotorischen Kräfte der beiden Elemente seien A und A_0, ihre wesentlichen Widerstände W und W_0, der Widerstand der Schliessung R; dann werden die Stromstärken in den beiden Fällen:

$$J = \frac{A + A_0}{W + W_0 + R},$$

$$J_1 = \frac{A - A_0}{W + W_0 + R}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{J}{J_1} = \frac{A + A_0}{A - A_0}$$

oder

$$A = \frac{J + J_1}{J - J_1} A_0.$$

4) Die zweite Fechnersche Methode setzt einen sehr langen Schliessungsdraht voraus; es soll der wesentliche Widerstand des Elementes gegen den Widerstand der Schliessung verschwindend klein sein. Wir haben dann

$$A_0 = JR, \qquad A = J_1 R,$$

wenn R den sehr grossen Widerstand der Schliessung bezeichnet, neben welchem die wesentlichen Widerstände W_0 und W verschwindend klein sein sollen; folglich ist

$$A = \frac{J_1}{J} A_0.$$

Alle vier Methoden trifft derselbe Vorwurf, der bei der ersten erhoben

wurde; sie sind für gewöhnliche, namentlich technische Bestimmungen recht brauchbar; streng wissenschaftlichen Forderungen aber genügen sie nicht.

§. 28.

Poggendorffs Methode zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft. Bestätigung des Voltaschen Spannungsgesetzes für Metalle.

5) Eine fünfte Methode hat Poggendorff angegeben; es wird die elektromotorische Kraft unter Umständen bestimmt, wo eine Polarisation nicht eintreten kann. Die elektromotorische Kraft, welche zu bestimmen ist, wird mit der elektromotorischen Kraft eines Normalelementes, etwa eines Daniellschen Zinkkupferelementes, verglichen. Die beiden Elemente werden zunächst so mit einander leitend verbunden, dass in dem einfachen Umgang die elektromotorischen Kräfte einander entgegenwirken; in der Figur sei Z_0, C_0 das Normalelement, und Z, C das Element, dessen elektromotorische Kraft zu bestimmen ist. Ferner wird eine Nebenschliessung angebracht, in welche ein messendes Galvanometer G und ein Rheostat R eingeschaltet sind. Endlich befindet sich in dem Zweig αZ ein Galvanometer G_1; dasselbe soll nur anzeigen, ob in dem Zweig $\alpha ZC\beta$ ein Strom fliesst.

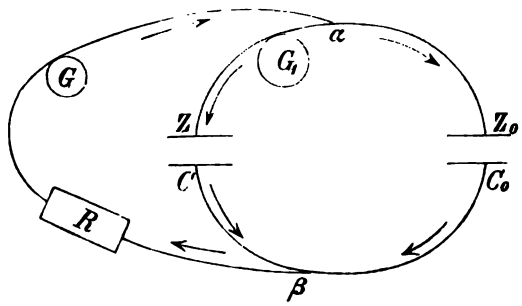


Fig. 52.

Man regulirt nun den Widerstand in dem Rheostaten R so, dass in dem Zweige $\alpha ZC\beta$ gar kein Strom fliesst; eine Polarisation in dem Element (Z, C) ist dadurch vollständig ausgeschlossen. Ferner wird die Stromstärke J in der Schliessung $\alpha GR\beta$ gemessen.

Die Stromstärken in den beiden Elementen seien j und j_1, so dass $j_1 = 0$ ist, die Widerstände der Elemente mit den Drähten w_0 und w, so dass in w auch der Widerstand des Galvanometers G_1 mit enthalten sei; endlich bezeichne R den Widerstand der Schliessung mit dem Galvanometer G und dem Rheostaten R. Wir haben dann

$$JR + jw_0 = A_0,$$
$$JR + j_1 w = A,$$
$$J = j + j_1.$$

Daraus folgt

$$j_1 = \frac{(R + w_0)A - RA_0}{(R + w_0)(R + w) - R^2}.$$

Damit $j_1 = 0$ werde, muss $A_0 > A$ sein; das ist immer einzurichten, indem man statt eines Normalelementes deren eine passende Zahl einschaltet, neben oder hinter einander, je nach dem Werthe von R. Durch den Rheostaten wird nun R so regulirt, dass j_1 gleich null wird; folglich ist dann

$$(R + w_0) A - R A_0 = 0$$

oder

$$A = \frac{R}{R + w_0} A_0 .$$

Man muss jedoch, während man den Rheostaten einstellt, den Strom immer öffnen und schliessen, indem sonst eine Polarisation in dem Element (Z, C) eintritt und nachwirkt.

Die obige Formel bestimmt A durch A_0, R und w_0; es müsste also A_0 bekannt sein und neben R auch w_0 bestimmt werden. Ist aber $j_1 = 0$, so folgt aus der zweiten der ursprünglichen Gleichungen

$$A = RJ ,$$

und die gesuchte elektromotorische Kraft ist demnach bestimmt, wenn der Widerstand R der Schliessung bekannt ist und die Stromstärke J gemessen wird. Es braucht dann die elektromotorische Kraft A_0 des Stromelementes nur während der kurzen Zeit, welche zu einer einzelnen Bestimmung nöthig ist, ungeändert zu bleiben, ebenso der schwer zu bestimmende wesentliche Widerstand w_0 des Normalelementes; die Werthe von A_0 und w_0 kommen weiter nicht in Betracht.

Nach dieser Methode hat Poggendorff Messungen angestellt*), und aus denselben folgt das allgemeine Gesetz:

Die elektromotorischen Kräfte A folgen demselben Gesetz, wie die sogenannten Spannungszahlen nach Volta.

Poggendorff bildet z. B. Elemente aus drei Metallen A, B, C; ihre Reihenfolge sei die der Voltaschen Spannungsreihe; er findet für die elektromotorischen Kräfte zwischen A und B, B und C, A und C bei Anwendung derselben Flüssigkeit die Werthe A_1, A_2, A_3, welche der Gleichung genügen:

$$A_3 = A_1 + A_2 .$$

So fand Poggendorff für Zink, Zinn und Kupfer in verdünnter Schwefelsäure

$$A_1 = 7{,}70, \quad A_2 = 7{,}79, \quad A_3 = 15{,}52;$$

für Zink, Kupfer, Silber wieder in verdünnter Schwefelsäure

$$A_1 = 15{,}76, \quad A_2 = 4{,}04, \quad A_3 = 19{,}83.$$

Im ersten Fall wird $A_1 + A_2 = 15{,}49$, $A_3 = 15{,}52$, im letztern $A_1 + A_2 = 19{,}80$, $A_3 = 19{,}83$. Die Werthe stimmen so nahe überein, als irgend zu erwarten ist, und wir haben die beiden Beispiele beliebig heraus-

*) Poggendorff, Pogg. Ann. 56.

gegriffen; die Uebereinstimmung ist in den andern Fällen ebenso gross. Das Gesetz muss als eines der durch directe Beobachtung am Besten bestätigten angesehen werden.

Allein diese Messungen geben nicht etwa den Spannungsunterschied zwischen den Metallen. Die elektromotorische Kraft ist, wenn eine Zink- und eine Kupferplatte in verdünnte Schwefelsäure eintauchen, nach der oben gebrauchten Bezeichnung

$$A = Z - K + (F, Z) + (K, F),$$

und wir dürfen, wenn es sich um genaue Messungen handelt, (F, Z) und (K, F) nicht gleich null setzen. Denn Poggendorff hat z. B. als Werth der elektromotorischen Kraft gefunden, wenn Zink und Kupfer eingetaucht werden

in verdünnte Schwefelsäure,	15,5,
in gesättigte Kochsalzlösung,	17,1,
in Jodkaliumlösung,	9,4;

die Werthe fallen also je nach der Flüssigkeit sehr verschieden aus. Der Widerstand der Flüssigkeiten kann nicht in Betracht kommen; Polarisation findet nicht statt; folglich müssen die elektromotorischen Kräfte zwischen Metall und Flüssigkeit ganz beträchtliche Werthe haben.

Ein Gesetz für die Werthe dieser letztern Kräfte geben aber die Bestimmungen von Poggendorff nicht. Wir nehmen die drei Metalle A, B, C in derselben Flüssigkeit; dann ist

$$A_1 = A - B + (F, A) + (B, F),$$
$$A_2 = B - C + (F, B) + (C, F),$$
$$A_3 = A - C + (F, A) + (C, F),$$

und

$$A_1 + A_2 = A - C + (F, A) + (C, F),$$

indem $(B, F) + (F, B)$ null sein muss, wenn auch das Spannungsgesetz nicht gilt. Das von Poggendorff gefundene Gesetz folgt also aus dem Voltaschen Spannungsgesetz für die Metalle und beweist mittelbar die Giltigkeit des letztern.

§. 29.

Wheatstones Methode zur Bestimmung des Widerstandes der Schliessung.

Wir lassen nun die Methoden zur Bestimmung des Widerstandes folgen. Im Allgemeinen sind drei Aufgaben zu lösen; erstens ist der Widerstand der Schliessung, zweitens der wesentliche Widerstand eines oder mehrerer Elemente, endlich drittens der Widerstand gegebener Drahtstücke zu bestimmen.

1) Wheatstone hat zur Bestimmung des Widerstandes in

der Schliessung die folgende Methode vorgeschlagen, welche bloss einen Rheostaten, dagegen nicht die Messung einer Stromstärke erfordert.

Wir nehmen zunächst an, es seien zwei ganz gleiche Elemente vorhanden von der elektromotorischen Kraft A und dem wesentlichen Widerstand W; der gesuchte Widerstand der Schliessung sei R. Wir haben dann, wenn wir ein Element einschalten, die Stromstärke

$$J = \frac{A}{W+R},$$

wenn wir dagegen die beiden Elemente hinter einander einschalten, die Stromstärke

$$J_1 = \frac{A}{W+\frac{1}{2}R}.$$

Nun wird entweder in dem letztern Fall der Widerstand der Schliessung vergrössert oder in dem erstern der Widerstand der Schliessung verringert, so dass in beiden Fällen derselbe Strom fliesst. Wir haben, wenn in dem erstern Fall R um die am Rheostaten gemessene Grösse ϱ vermindert wird,

$$J_1 = \frac{A}{W+R-\varrho} = \frac{A}{W+\frac{1}{2}R},$$

folglich $$\varrho = \frac{1}{2}R,$$

also $$R = 2\varrho,$$

und dasselbe ergiebt sich, wenn

$$J = \frac{A}{W+R} = \frac{A}{W+\frac{1}{2}R+\varrho}.$$

Die Voraussetzung, dass zwei genau gleiche Elemente vorhanden seien, ist höchstens annähernd zu erfüllen, und die Gleichheit kaum zu erhalten. Aber die Elemente können ebenso gut verschieden sein; wir haben dann, je nachdem wir das eine oder das andere Element einschalten, immer mittelst derselben Schliessung,

$$J = \frac{A}{W+R}, \qquad J_1 = \frac{A_1}{W_1+R}.$$

Wir ändern nun in dem zweiten Falle den Widerstand R um r, so dass die Ströme gleich stark werden; dann ist

$$J = \frac{A}{W+R} = \frac{A_1}{W_1+R+r}.$$

Endlich schalten wir die beiden Elemente hinter einander ein, und vermehren den Widerstand um ϱ, so dass der Strom auch wieder die Stärke J besitzt,

$$J = \frac{A+A_1}{W+W_1+R+\varrho}.$$

Aus den Gleichungen folgt

$$W + W_1 + 2R + r = W + W_1 + R + \varrho,$$

also

$$R = \varrho - r.$$

Die Widerstände ϱ und r sind sehr einfach am Rheostaten abzulesen. Die Methode ist vorzüglich, da keine bedenkliche Voraussetzung muss gemacht werden.

§. 30.

Wesentlicher Widerstand; zwei Methoden von Wheatstone zur Bestimmung desselben.

2) Dies gilt nicht mehr von der ähnlichen Methode, die Wheatstone zur Bestimmung des wesentlichen Widerstandes eines Elementes angewandt hat.

Wir nehmen vorläufig wieder zwei gleiche Elemente an. Es wird zuerst das eine eingeschaltet, dann die beiden neben einander, so dass der wesentliche Widerstand auf die Hälfte reducirt wird; wir haben so

$$J = \frac{A}{W + R},$$

$$J_1 = \frac{A}{\frac{1}{2}W + R}.$$

Wir vermehren nun in dem letztern Falle den Widerstand so lange, bis die Stromstärke auf den frühern Werth herunter gegangen ist; dann ergiebt sich

$$J = \frac{A}{W + R} = \frac{A}{\frac{1}{2}W + R + \varrho},$$

folglich

$$W = 2\varrho.$$

Hier hat nun wohl in der Schliessung der Strom dieselbe Stärke, aber nicht in den Elementen; im erstern Fall fliesst der Strom J durch das Element, in dem letztern der Strom $\frac{J}{2}$. Es wird aber vorausgesetzt, dass A und W in den beiden Fällen dieselben Werthe haben; dem widerspricht die Erfahrung; A und W sind von der Stromstärke abhängig, und die Messung liefert uns einen Mittelwerth aus den beiden verschiedenen Werthen des wesentlichen Widerstandes.

Dieser Mittelwerth ist für viele praktische Zwecke genügend, etwa wenn es sich um die beste Anordnung der Elemente handelt; es soll ja eine Säule in der Regel auch verschiedene Ströme liefern.

Die andere Voraussetzung, dass die Elemente gleich seien, ist wieder unwesentlich. Die beiden Elemente seien verschieden; wir schalten erst das eine, dann das andere, endlich beide neben einander ein und reguliren den Widerstand so, dass in der Schliessung immer derselbe Strom fliesst. Dann gelten die Gleichungen

$$J = \frac{A}{W+R} = \frac{A_1}{W_1+R+r} = \frac{\frac{A}{W}+\frac{A_1}{W_1}}{\left(R+\varrho\right)\left(\frac{1}{W}+\frac{1}{W_1}\right)+1},$$

und es folgt aus denselben

$$1+\frac{R}{W}+1+\frac{R+r}{W_1} = \left(R+\varrho\right)\left(\frac{1}{W}+\frac{1}{W_1}\right)+1$$

oder

$$\varrho\left(\frac{1}{W}+\frac{1}{W_1}\right) - r\,\frac{1}{W_1} = 1.$$

Diese eine Gleichung kann die beiden wesentlichen Widerstände W und W_1 nicht bestimmen. Machen wir aber ein zweites System von Beobachtungen, wo der ursprüngliche Widerstand der Schliessung R' ist, so erhalten wir eine ähnliche Gleichung mit den beiden Widerständen r' und ϱ'. Folglich ist zweitens

$$\varrho'\left(\frac{1}{W}+\frac{1}{W_1}\right) - r'\,\frac{1}{W_1} = 1.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt endlich

$$W = \frac{\varrho' r - \varrho r'}{\varrho' - r' - \varrho + r},$$

$$W_1 = \frac{\varrho' r - \varrho r'}{\varrho - \varrho'}.$$

Das sind aber nicht näher zu definirende Mittelwerthe, indem die Grössen A und W in den verschiedenen Fällen verschiedene und nicht gleiche Werthe haben.

Eine zweite Methode von Wheatstone zur Bestimmung des wesentlichen Widerstandes benutzt nur ein Element und beruht auf dem Princip der Stromtheilung; auch hier handelt es sich allein um Ablesung von Widerständen an einem Rheostaten; eine Messung von Stromstärken ist nicht nöthig.

Die beiden Pole des Elementes werden durch einen Draht verbunden und der Rheostat, ferner ein Multiplicator zur Beobachtung der Stromstärke eingeschaltet; der Widerstand dieser ganzen Schliessung sei R. Dann fliesst in derselben ein Strom

$$J = \frac{A}{W+R}.$$

Nun werden die Pole durch einen zweiten einfachen Draht verbunden; sein Widerstand sei R_1; dann theilt sich der Strom in die beiden Zweige, und wir haben in der ersten Schliessung den Strom

$$j = \frac{A}{W\left(1+\frac{R}{R_1}\right)+R}.$$

Wir öffnen wieder die zweite Schliessung und vermehren den Widerstand R der ersten mittelst des Rheostaten so lange, bis bei einfacher

Schliessung die Stromstärke auf denselben Werth gesunken ist, so dass

$$j = \frac{A}{W + R + \varrho}.$$

Aus den Gleichungen folgt

$$W = \frac{R_1}{R}\varrho.$$

Diese Methode ist sehr bequem, weil man das Verhältniss der Widerstände $\frac{R_1}{R}$ ein für alle Mal bestimmen kann; man hat also in der einzelnen Messung nur ϱ abzulesen. Aber es trifft diese Methode derselbe Vorwurf, wie die andern: es fliesst in den beiden Fällen ein wesentlich verschieden starker Strom durch das Element.

§. 31.

Widerstand gegebener Drahtstücke.

3) Um den Widerstand einzelner Leiterstücke zu bestimmen, giebt es zwei Methoden, beide von ausserordentlicher Schärfe.

Die eine benutzt ein Differentialgalvanometer. Die beiden Umgänge werden, wie die Zeichnung andeutet, nebeneinander in den Strom eingeschaltet, nach der Combination II von Seite 60; die Ströme fliessen also durch die beiden Umwindungen in entgegengesetzter Richtung. In ab können beliebige Leiterstücke eingeschaltet werden; in cd aber ist ein Rheostat eingeschaltet.

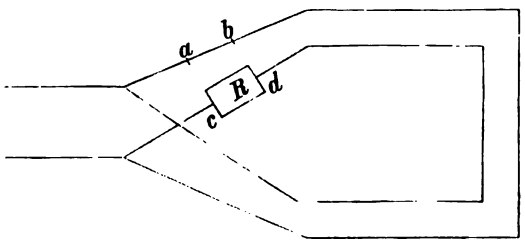


Fig. 33.

Die Stromstärke im Stammstrom sei J, in den beiden Zweigen j und j_1; dann ist, wenn a und b leitend verbunden sind, und wenn w und w_1 die Widerstände der beiden Zweige bezeichnen,

$$j = \frac{w_1}{w + w_1} J, \qquad j_1 = \frac{w}{w + w_1} J;$$

somit wird die Gleichgewichtslage der Nadel im Galvanometer durch die Gleichung bestimmt

$$(j - j_1) F(\varphi) = J \frac{w_1 - w}{w_1 + w} F(\varphi) = H \sin \varphi .$$

Mittelst des Rheostaten werde nun der Widerstand w_1 so lange vergrössert oder verkleinert, bis die Nadel die Gleichgewichtslage null annimmt; das ist nur möglich, wenn $w = w_1$. Dann wird in ab das Leiterstück eingeschaltet, dessen Widerstand x zu bestimmen ist; hiedurch wird w um x vermehrt. Soll nun die Magnetnadel wieder in

der Lage $\varphi = 0$ zur Ruhe kommen, so muss w_1 um einen Widerstand ϱ vermehrt werden, der gleich x ist. Folglich wird

$$x = \varrho,$$

wenn ϱ den Widerstand bezeichnet, der mittelst des Rheostaten muss eingeschaltet werden, damit keine Ablenkung der Nadel in dem Differentialgalvanometer stattfinde.

Ist das eingeschaltete Leiterstück ein sogenannter Widerstandsétalon, und soll der Rheostat mittelst desselben calibrirt werden, so erreichen wir diesen Zweck auf dem oben angegebenen Wege sehr einfach; wir können sofort die Drahtlängen, deren Widerstände dem des Etalons gleich sind, an dem Rheostaten messen.

Die Methode ist bei Anwendung starker Ströme sehr genau. Mittelst derselben können sehr kleine Aenderungen des Leitungsvermögens bestimmt werden, wie sie Erwärmung, Spannung, bleibende Dehnung hervorbringen, u. s. f.

Die andere Methode ist die der Wheatstoneschen Brücke, welche ebenso scharf und einfach den Widerstand gegebener Leiterstücke misst.

Ein Theil AB des Schliessungsdrahtes sei neben einem Maassstab gerade ausgespannt; ein zweiter Zweig führe auf dem Wege ACB von A nach B, so dass in A und B Verzweigung stattfindet; endlich führe ein Draht von C nach einem Galvanometer G und von da nach einer Stelle D, die längs AB verschiebbar sei; dies ist die sogenannte Brücke.

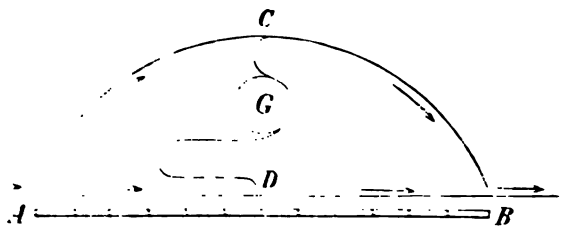


Fig. 34.

Der Strom trete in A ein und in B aus; dann fliessen in den Zweigen AD, DB, AC, CB Ströme in der Richtung der Pfeile. Dagegen wird die Richtung des Stromes in der Brücke von der Lage der Stelle D abhängen, und es giebt immer eine bestimmte Lage, für welche kein Strom in der Brücke fliesst. Diese Stelle wird durch Hin- und Herschieben von D aufgesucht; sie ist sehr scharf zu finden, da bei einer Verschiebung nach Links oder nach Rechts entgegengesetzt gerichtete Ströme durch die Brücke fliessen.

Die Intensität im Stammstrom sei J, die Intensitäten und Widerstände in den Zweigen AC, CB, AD, DB (j_1, w_1), (j_2, w_2), (j_3, w_3),

(j_4, w_4), endlich in der Brücke (j_0, w_0). Dann geben die Gesetze der Stromtheilung:

$$J = j_1 + j_3, \quad j_1 = j_0 + j_2, \quad j_3 + j_0 = j_4;$$
$$j_1 w_1 + j_2 w_2 = j_1 w_1 + j_0 w_0 + j_4 w_1 = j_3 w_3 + j_4 w_4.$$

Hieraus folgt:

$$j_3 = J - j_1, \quad j_4 = J - j_2,$$
$$j_0 = j_1 - j_2;$$
$$j_1 = \frac{w_0(w_3 + w_4) + w_3(w_2 + w_4)}{w_0(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + (w_1 + w_3)(w_2 + w_4)} J,$$
$$j_2 = \frac{w_0(w_3 + w_4) + w_4(w_1 + w_3)}{w_0(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + (w_1 + w_3)(w_2 + w_4)} J.$$

Folglich muss, damit j_0 verschwinde,

$$j_1 = j_2,$$

also

$$w_2 w_3 = w_1 w_4$$

sein, oder

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}.$$

Dies kann immer durch eine Lage von D erreicht werden.

Auf dieser einfachen Relation beruht die Anwendung der Wheatstoneschen Brücke. Man schaltet statt AC das gegebene Leiterstück mit dem zu bestimmenden Widerstand x ein, statt CB den Widerstandsétalon, dessen Widerstand E sei. Dann folgt

$$x = \frac{w_3}{w_4} E,$$

und das Verhältniss der Widerstände w_3 und w_4 ist das der Längen AD und DB, welche unmittelbar an dem Maassstab abgelesen werden.

Die Methode liefert äusserst genaue Resultate, wenn man ein sehr empfindliches Galvanometer und einen starken Strom anwendet.

§. 32.

Neumanns Methode zur Bestimmung der Polarisation und des Uebergangswiderstandes.

Schliesslich geben wir noch eine Methode zur Bestimmung der Polarisation und des Uebergangswiderstandes. Wie wir oben hervorgehoben haben, werden bei all den bisher erwähnten Methoden diese beiden Elemente nicht von einander gesondert; man hat immer die Polarisation für sich allein zu bestimmen gesucht, und da dies nicht möglich ist, konnten die Messungen zu keinem genauen Resultat führen.

Die Methode, welche wir jetzt angeben, combinirt die beiden Messungen mittelst des Differentialgalvanometers und der Wheatstoneschen Brücke. Wir benutzen ein Differentialgalvanometer nach der Anordnung II, so dass die Ströme in den beiden Umwindungen ent-

gegengesetzt fliessen; ferner seien an den Stellen R und R_1 Rheostaten eingeschaltet, und an der Stelle B eine Tangentenboussole. In dem

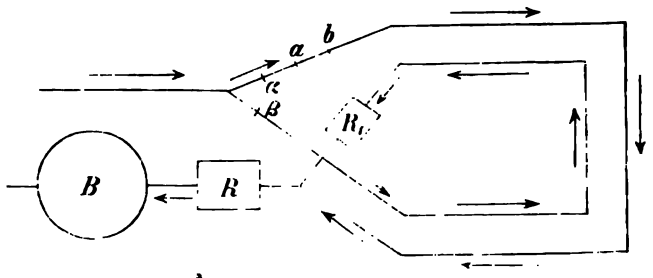


Fig. 35.

Stammstrom wird die Stromstärke J mittelst des Rheostaten R constant erhalten und an der Tangentenboussole B gemessen. Zwischen a und b wird ein Zersetzungsapparat eingeschaltet mit der Flüssigkeit und den Metallen, deren Polarisation soll untersucht werden; ein prismatischer Glaskasten wird z. B. mit Kupfervitriollösung gefüllt und zwei Kupferplatten von gleicher Fläche einander parallel in einer bestimmten messbaren Entfernung eingetaucht.

Zunächst wird vor Einschaltung des Zersetzungsapparates der Rheostat R_1 so gestellt, dass die Nadel des Differentialgalvanometers keine Ablenkung erleidet; die Widerstände der beiden Zweige sind dann einander gleich,

$$w = w_1 .$$

Hierauf wird der Zersetzungsapparat eingeschaltet. Die Stromstärken in den Zweigen werden jetzt verschieden, j und j_1, und die Nadel des Differentialgalvanometers wird um den Winkel φ abgelenkt; wir haben

$$(j - j_1) F(\varphi) = H \sin \varphi ,$$

und suchen die Werthe j und j_1 zu bestimmen. Einmal ist nun

$$J = j + j_1 ,$$

ferner aber, indem wir den geschlossenen einfachen Umgang betrachten, den die beiden Windungen des Differentialgalvanometers liefern,

$$j(w + U + R) - j_1 w_1 = - p ,$$

wo p die Polarisation, U den Uebergangswiderstand und R den Widerstand der Flüssigkeit in dem Zersetzungsapparat bezeichnen. Die beiden Gleichungen bestimmen j und j_1.

Wir vereinfachen aber die Formeln dadurch, dass wir $j = j_1$ machen. Zu dem Ende schalten wir mittelst des Rheostaten R_1 den Widerstand ϱ ein, so dass $\varphi = 0$ wird; wir haben dann

$$j = j_1 = \tfrac{1}{2} J$$

und

$$- p = \tfrac{1}{2} J(U + R - \varrho) .$$

wo ϱ und J bekannt sind; wir hatten oben die Widerstände w und w_1 gleich gemacht.

Nun lässt sich die Grösse R, der Widerstand der Flüssigkeit, dadurch bestimmen, dass man die Entfernung der Platten in dem Zersetzungsapparate ändert; denn bei dieser Aenderung werden U und p ihre Werthe behalten. Die Enfernung der Platten sei zuerst L, dann L'; wir haben, wenn in dem letztern Falle der Widerstand ϱ' statt ϱ muss eingeschaltet werden,

$$-p = \tfrac{1}{2} J\left(U + R\frac{L'}{L} - \varrho'\right);$$

folglich wird

$$R - \varrho = R\frac{L'}{L} - \varrho'$$

oder

$$R = \frac{\varrho' - \varrho}{L' - L} L.$$

Damit ist der Widerstand der Flüssigkeitssäule gemessen.

Wir brauchen also nur noch eine Gleichung zur Bestimmung der Grössen p und U. Diese gewinnen wir durch eine dritte Beobachtung, wobei das Differentialgalvanometer als Brücke in den Wheatstoneschen Apparat eingeschaltet wird. Es bezeichne $ABCD$ wieder einen solchen Apparat; die Stelle D sei so gewählt, dass nach der frühern Bezeichnung

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}.$$

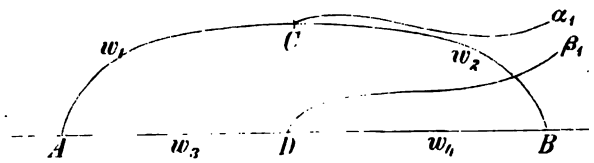


Fig. 36.

Mittelst einer Wippe werden nun plötzlich α mit α_1, β mit β_1 verbunden, gleichzeitig die Enden des Stammstromes mit A und B, so dass wir in dem Wheatstoneschen Apparat keinen besondern Strom brauchen. Wir haben dann den Zersetzungsapparat in der Brücke. Im Augenblick des Umlegens erleidet die Galvanometernadel eine Ablenkung; sie rührt von der elektromotorischen Kraft in der Brücke her, von der Polarisation allein; wäre eine solche activ wirkende Kraft nicht vorhanden, so müsste die Nadel in Ruhe bleiben.

Die Verbindung des Differentialgalvanometers mit dem Wheatstoneschen Apparat darf nur auf einen Augenblick stattfinden; erleidet die Nadel einen Ausschlag, so verschieben wir den Draht längs AB, stellen die Verbindung wieder auf einen Augenblick her und beobachten die Nadel; wir erreichen schliesslich durch Hin- und Herschieben, dass die Nadel in Ruhe bleibt, wenn wir die Verbindung auf einen Augen-

blick herstellen; aus dem Abstand der Stelle D_1, wo das stattfindet, von der Stelle D kann auf die Polarisation p geschlossen werden.

Hierzu brauchen wir die Bezeichnungen j_1, j_2, j_3, j_4 und w_1, w_2, w_3', w_4' für die Stromstärken und die Widerstände in den Stücken AC, CB, AD_1, D_1B. Wir haben dann, da in der Brücke kein Strom fliessen soll,

$$j_1 w_1 - j_3 w_3' = -p,$$
$$j_2 w_2 - j_4 w_4' = p,$$
$$j_1 = j_2, \qquad j_3 = j_4,$$

endlich
$$j_1 + j_3 = J_1,$$

wenn J_1 die Stärke des Stammstromes in dem Wheatstoneschen Apparat bezeichnet, welche mittelst der Tangentenboussole gemessen wird. Aus den Gleichungen folgt

$$j_1 (w_1 w_4' - w_2 w_3') = -p(w_3' + w_4'),$$
$$j_3 (w_1 w_4' - w_2 w_3) = -p(w_1 + w_2),$$

also
$$J_1 (w_2 w_3' - w_1 w_4') = p(w_1 + w_2 + w_3' + w_4').$$

Bezeichnen aber, wie oben, w_3 und w_4 die Widerstände der Stücke AD und DB, ferner u den bekannten Widerstand des Stückes DD_1, so ist

$$w_3' = w_3 + u, \qquad w_4' = w_4 - u;$$

wir haben ferner

$$w_2 w_3 - w_1 w_4 = 0;$$

folglich wird
$$p = \frac{w_1 + w_2}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} u J_1.$$

Die Polarisation p wird also ausgedrückt durch den bekannten Widerstand u der Drahtlänge DD_1, durch die an der Tangentenboussole gemessene Stromstärke J_1 und durch die Zahl $\frac{w_1 + w_2}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}$, welche für den Wheatstoneschen Apparat bloss einmal bestimmt zu werden braucht.

Setzen wir den Werth von p in die oben für p und U erhaltene Gleichung ein, so ergiebt sich

$$U = \varrho - R - \frac{1}{2} \frac{J_1}{J} \frac{w_1 + w_2}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} u,$$

wodurch auch der Uebergangswiderstand U bestimmt ist.

Wir finden so die Werthe von p und U, welche einer bestimmten Stromstärke J entsprechen, und zwar ist in dem Zweige, in welchen der Zersetzungsapparat eingeschaltet ist, die Stromstärke gleich $\frac{J}{2}$.

Wir haben zugleich eine neue Methode zur Bestimmung einer elektromotorischen Kraft kennen gelernt; wir schalten zu diesem Ende das zu untersuchende Element in die Brücke des Wheatstoneschen Apparates ein; die elektromotorische Kraft des Elementes tritt dann

an die Stelle von p in unsrer Gleichung. Da in der Brücke kein Strom fliesst, kann eine Polarisation unmöglich eintreten, und die Methode leistet genau dasselbe, was die von Poggendorff.

Um eine Controle für die Genauigkeit der Bestimmung von p zu erhalten, wurden zwischen die beiden Kupferplatten in der Kupfervitriollösung des Zersetzungsapparates eine dritte und eine vierte Kupferplatte eingeschaltet, die ganz frei waren; die Polarisation muss dann die doppelte und die dreifache sein; die Messungen geben die Werthe

$$0{,}416, \quad 0{,}835, \quad 1{,}238.$$

Die Uebereinstimmung ist sehr gut, wenn man beachtet, dass in dem vorliegenden Fall, Kupfer in Kupfervitriollösung, die Polarisation sehr gering ist; man hat sogar in ältern Bestimmungen angenommen, es finde hier gar keine Polarisation statt, und diese Annahme der Bestimmung andrer Polarisationen zu Grunde gelegt.

Die obigen Zahlen geben das Verhältniss der Polarisation p zu einer bestimmten Stromstärke an; die letztere war dadurch festgesetzt, dass sie in der Tangentenboussole eine Ablenkung von $5^0{,}5$ hervorbrachte; sie werde mit J_0 bezeichnet. Um diese Stromstärke auf ein allgemein gebräuchliches Maass zurückzuführen, wurde mittelst desselben Apparates die elektromotorische Kraft einiger Elemente bestimmt. Es ergab sich für die elektromotorische Kraft eines Kupferwismuthelementes, wo die Temperaturdifferenz der Löthstellen 100^0 betrug,

$$A = 0{,}134 \cdot J_0;$$

die elektromotorische Kraft der Polarisation ist also in einem ungünstigen Falle immer noch dreimal so gross. Dagegen wurde für ein Daniellsches Zinkkupferelement

$$A = 34{,}2 \cdot J_0 .$$

Damit können die obigen Angaben auf dieses Maass reducirt werden.

Weiter ergab sich für die Polarisation von Kupferplatten in Zinkvitriollösung

$$p = 19{,}5\, J_0 ,$$

in verdünnter Schwefelsäure

$$p = 16 \cdot J_0 - 19 \cdot J_0 .$$

Namentlich in dem letzten Fall war die Polarisation sehr veränderlich, wegen der Wasserstoffentwickelung; jede Erschütterung ändert den Werth von p.

Man kann endlich auch der Frage näher treten, ob ein Uebergangwiderstand U wirklich vorhanden sei oder nicht. Nach der oben abgeleiteten Formel erhält U einen bestimmten Werth, und die Messungen, welche mit Kupfervitriollösung ausgeführt wurden, ergeben, dass dieser Werth durchaus nicht verschwindend klein ist. Ferner

folgt aus denselben, dass, wie oben (Seite 70) angegeben, der Uebergangswiderstand mit wachsender Intensität abnimmt, etwa nach der Formel

$$U = a + \frac{b}{j}.$$

Wollte man in dem vorliegenden Fall die ganze Stromschwächung, welche durch Polarisation und Uebergangswiderstand zusammen hervorgebracht wird, einer Polarisation allein zuschreiben, so würde diese Polarisation acht bis zehn Mal so gross werden, als sie die oben genannten Messungen ergeben haben.

Zu weiterem Studium über den bis jetzt abgehandelten Theil von der Theorie der elektrischen Ströme kann ein sehr vollständiges und umfassendes Lehrbuch empfohlen werden:

G. Wiedemann, Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Erster Band. Galvanismus. Braunschweig, 1861.

III. Kapitel.

Die Ampèreschen Gesetze.

§. 33.

Die vier Ampèreschen Fundamentalsätze.

Bald nachdem Oersted die Einwirkung eines Stromes auf einen Magnet beobachtet hatte, entdeckte Ampère*), dass auch zwischen zwei elektrischen Strömen Anziehungen und Abstossungen stattfinden; er zeigte, dass geradlinige parallele Stromleiter sich anziehen, wenn sie von gleichgerichteten Strömen durchflossen werden, dagegen sich abstossen, wenn die Ströme entgegengesetzte Richtung haben. Dies kann leicht nachgewiesen werden mittelst eines Apparates, wie des durch beistehende Figur angedeuteten. Das Drahtviereck *ABCDEF*

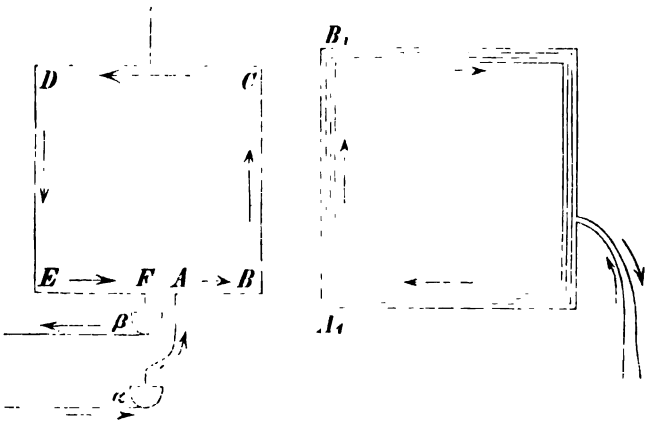


Fig. 37.

ist an einem Faden aufgehängt; zwei Spitzen, die in die Verlängerung des Fadens fallen, tauchen in die Quecksilbernäpfe α und β ein; mittelst derselben wird ein Strom eingeleitet, und der Stomleiter ist ohne Unterbrechung des Stromes um eine verticale Axe drehbar. Durch

*) Die Hauptabhandlung von Ampère ist die folgende (Mém. de l'Acad. des Sciences. T. VI. 1823): Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 28 novembre 1825.

Näherung des Strombündels $A_1 B_1$ an BC weist man die Anziehung und Abstossung nach.

Nachdem Ampère diese Wirkungen festgestellt hatte, suchte er ein Elementargesetz für dieselben auf. Hiezu boten sich zwei Wege. Entweder konnte er eine Reihe möglichst genauer messender Beobachtungen anstellen und die Resultate derselben durch eine Hypothese zu verbinden suchen. Allein dieser Weg hätte kaum ans Ziel geführt; denn es ist schwer, die Function, welche die Wirkung der Kraft darstellt, zu ermitteln, wenn sie von einem einzigen Argument abhängt; in dem vorliegenden Falle wäre aber eine Function von vier Argumenten zu finden, nämlich von der Entfernung r der beiden Stromelemente und von deren gegenseitiger Lage, welche durch drei Winkel bestimmt wird. Und wenn es kaum möglich war, eine solche Function von vier Argumenten durch directe Beobachtung zu ermitteln, so besass Ampère noch gar kein Mittel zu genauer Messung der Anziehungen und Abstossungen.

Er schlug deshalb einen andern Weg ein; er suchte aus den Beobachtungen Gesetze abzuleiten, woraus sich analytische Folgerungen ziehen liessen; auf einem solchen Wege war die Astronomie so weit fortgeschritten: Kepler hatte aus den Beobachtungen Gesetze abgeleitet für die Bewegung der Himmelskörper, und aus diesen Keplerschen Gesetzen hatte dann Newton die analytischen Folgerungen gezogen.

Von diesem Gedanken geleitet fand Ampère ganz direct vier Fundamentalgesetze, welche für die Wirkung elektrischer Ströme auf einander gelten sollten, und zwar hat er dieselben auf Gleichgewichtsfälle gegründet, so dass eigentliche Messungen umgangen wurden; aus diesen Fundamentalgesetzen folgt dann das Gesetz für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander ganz ähnlich, wie das Newtonsche Gravitationsgesetz aus den Keplerschen Gesetzen. Wir wollen also zunächst diese vier Fundamentalgesetze und ihre experimentelle Begründung angeben.

1) Die Wirkung eines Stromes ist immer gleich und entgegengesetzt gerichtet, wenn die Richtung des Stromes umgekehrt wird.

Dies ergiebt sich daraus, dass die Wirkung zweier gerader, paralleler, einander sehr nahe liegender Drähte, welche von demselben Strom in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden, immer gleich null ist, ebenso wie die Wirkung jedes andern Stromes auf diese beiden.

2) Fliesst ein Strom von A nach B in gerader Linie oder in einer beliebigen Zickzacklinie, welche sich von der Geraden nur sehr wenig entfernt, so ist die Wirkung dieselbe.

Ein Draht wird in gerader Linie von A nach B geführt, und dann

in beliebigem, eng um AB gewundenem Zickzack von B nach A zurück; fliesst ein Strom durch den Draht, so ist die Wirkung desselben immer null, wie oben.

Diese beiden ersten Sätze sind in aller Schärfe nachgewiesen; wir können eine sehr schwache Wirkung wahrnehmen, und die Beobachtung giebt keine Spur an. Leider gilt das nicht mehr von den folgenden beiden Sätzen, namentlich dem dritten.

3) Die Wirkung irgend eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement steht auf dem letztern immer senkrecht.

Diesen Satz hat Ampère auf den folgenden Versuch gegründet: An einem Faden ist ein hölzerner Stab AG horizontal aufgehängt;

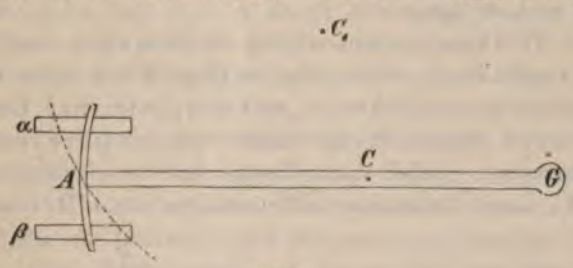


Fig. 38.

der Stab trägt an dem einen Ende A einen metallenen Kreisbogen, an dem andern Ende ein Gegengewicht G; die Ebene des Kreisbogens ist horizontal, und der Mittelpunkt C des Kreises fällt in die verticale Drehungsaxe. Endlich stehen unter dem Bogen zwei Gefässe α und β; werden diese ganz mit Quecksilber gefüllt, so taucht der Metallbogen gerade ein. Werden α und β mit den Polen einer Säule leitend verbunden, so fliesst ein Strom durch den Kreisbogen, und dieses Stück eines Kreisstromes ist um den Mittelpunkt C des Kreises drehbar.

Wurde nun ein möglichst starker Strom, eine vom Strom durchflossene Drahtrolle dem Bogen genähert, von verschiedenen Seiten, so ergab sich niemals eine Wirkung; der Bogen blieb immer in Ruhe. Es war aber mittelst eines Charniers möglich, den Metallbogen aus der angegebenen Stellung gegen den Stab zu bringen, so dass sein Mittelpunkt nicht mehr in die Drehungsaxe fiel, sondern etwa in die Stelle C_1 oder auf die entgegengesetzte Seite; dann wurde im Allgemeinen der Bogen durch den Strom in Bewegung versetzt, und zwar durch denselben Strom in entgegengesetzter Richtung, je nachdem der Bogen in dem einen oder andern Sinne aus seiner ursprünglichen Stellung herausgedreht war. Folglich musste bei dieser ursprünglichen Stellung wirklich Gleichgewicht stattfinden.

Hieraus hat Ampère geschlossen, dass die Wirkung des geschlossenen Stromes auf den Bogen nach dem Mittelpunkt des letztern gerichtet

sein müsse; eine solche Kraft kann den Bogen nicht in Bewegung versetzen, wenn derselbe nur um den Mittelpunkt drehbar ist. Dieser Satz muss ferner für jeden Theil des Kreisbogens besonders gelten, also für jedes Element desselben; denn indem wir die Quecksilbergefässe einander nähern oder von einander entfernen, können wir beliebige Theile aus- oder einschalten. Folglich ist die Wirkung auf ein Bogenelement nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet, d. h. die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement steht auf dem letztern immer senkrecht.

Dieser experimentelle Beweis hat lange nicht die Schärfe der beiden ersten; es findet zwischen dem Metall und dem Quecksilber Reibung statt, welche eine Bewegung hindern kann, und diese Reibung ist nie vollständig zu beseitigen.

4) Die Wirkung zweier Stromelemente auf einander bleibt unverändert, wenn die beiden Elemente in demselben Verhältniss vergrössert werden, wie ihre Entfernung.

Zum Beweis dieses letzten Satzes hat Ampère den folgenden Apparat construirt. Ueber einem Tische sind zwei Drahtkreise $A_1 B_1 D_1$ und $A_2 B_2 D_2$, deren Halbmesser sich verhalten wie 1 : 4, fest aufgestellt;

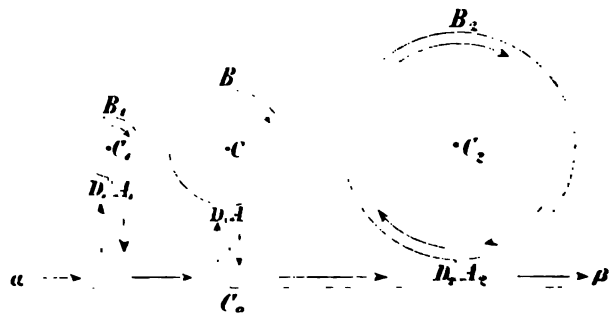


Fig. 39.

zwischen denselben befindet sich ein Drahtkreis ABD von dem Halbmesser 2; dieser letztere ist um eine verticale Axe durch C_0 leicht drehbar gemacht; in der normalen Stellung liegen die drei Mittelpunkte $C_1 C C_2$ auf einer Geraden, und es ist CC_2 doppelt so gross, wie CC_1. Ferner sind die Drahtkreise so mit einander leitend verbunden, dass ein und derselbe Strom, der etwa in α ein- und in β austritt, durch die drei Kreise kann geleitet werden; er fliesst dann in der Richtung der Pfeile. Die Beobachtung ergiebt, dass der mittlere Kreis bei der angegebenen Stellung in Ruhe bleibt; bringt man ihn aus dieser Lage heraus, so wird er in dieselbe zurückgetrieben; er pendelt um diese Gleichgewichtslage hin und her. Und zwar muss der mittlere Kreis von jedem der beiden äussern Kreise abgestossen werden; denn die Ströme haben in den benachbarten Theilen entgegengesetzte Rich-

tung. Die beiden Abstossungen sind also entgegengesetzt gleich, wenn die Abstände der Mittelpunkte in demselben Verhältniss stehen, wie die Halbmesser der Kreise, also auch wie die Umgänge oder wie entsprechende Theile dieser Umgänge. Auf diesem Wege hat Ampère den vierten Satz bewiesen.

§. 34.

Gesetz für die Wirkung zwischen zwei Stromelementen.

Aus den vier Sätzen folgt das Elementargesetz für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander, wenn wir noch einige sehr allgemeine Annahmen zu Hilfe nehmen. Und zwar sind dies die folgenden:

Gleichgerichtete Ströme ziehen sich an. Wir sehen dies bei zwei parallelen Leitern; die Länge derselben ist ganz gleichgiltig; folglich gilt der Satz auch für Stromelemente.

Ferner muss eine Hypothese gemacht werden über die Abnahme der Wirkung mit der Entfernung; die Wirkung sei umgekehrt proportional der $n$ten Potenz der Entfernung.

Endlich soll die Wirkung zweier Stromelemente auf einander in die Richtung ihrer Verbindungslinie fallen; diese Annahme bildet die Grundlage der ganzen Ampèreschen Entwicklung. Es soll das eine Stromelement auf das andere eine bestimmte Kraft ausüben, welche in die Richtung der Verbindungslinie fällt, und die Kraft, welche das letztere Stromelement auf das erstere ausübt, soll jener Kraft an Grösse gleich und entgegengesetzt gerichtet sein.

Nach dem ersten Satze wird die Wirkung eines Stromes mit Umkehrung seiner Richtung immer die entgegengesetzte. Dies gilt bei jeder Länge des Leiters, folglich auch für ein unendlich kleines Stück, ein Element. Kehren wir also in den beiden Elementen, deren Wirkung auf einander zu bestimmen ist, die Stromrichtung um, so bleibt die Wirkung dieselbe.

Hieraus ergiebt sich der weitere Schluss: Kann die Wirkung mit Umkehrung der Stromrichtung in dem einen Element nicht die entgegengesetzte werden, so muss sie nothwendig gleich null sein. Indem wir von dieser Schlussfolgerung Gebrauch machen, können wir sofort einen sehr allgemeinen Fall angeben, wo die Wirkung zweier Stromelemente auf einander null ist.

Legen wir nämlich durch die Mitte eines Stromelementes senkrecht auf dasselbe eine Ebene, und nehmen wir in dieser Ebene ein zweites sonst beliebig gelegenes Stromelement an, so muss die Wirkung zwischen diesen beiden Elementen null sein. Das erstere Stromelement stehe in α senkrecht auf der Ebene der Zeichnung; das letztere werde durch ab in der Ebene der Zeichnung dargestellt. Dann übt dieses auf das erstere eine Wirkung in der Richtung $a\alpha$ aus; sie

muss anziehend oder abstossend sein, je nach der Richtung der Strömung in α. Mag nun aber diese Strömung von unten nach oben, oder von oben nach unten gehen, die relative Lage des einen Stromelementes gegen das andere ist genau dieselbe. Von dieser relativen Lage aber soll die Wirkung allein abhangen; folglich muss in den beiden Fällen die Wirkung dieselbe sein. Sie kann also, wenn wir die Stromrichtung in α umkehren, nicht in die entgegengesetzte übergehen; demnach muss sie gleich null sein.

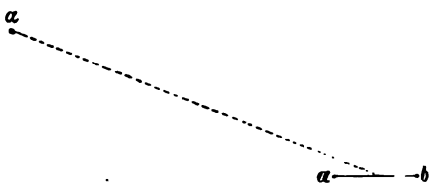


Fig. 40.

Aus dem zweiten Satze aber folgt, dass man ein Stromelement immer ersetzen kann durch seine Projectionen auf drei rechtwinklige Richtungen; denn wir ersetzen dann das gerade Stromelement durch eine Zickzacklinie, die von der Geraden nur unendlich wenig abweicht; wir gehen, statt auf der Diagonale, auf den drei Kanten von der einen Ecke des Parallelepipedums zu der gegenüberliegenden Ecke.

Wir machen davon Gebrauch zur Ableitung des Elementargesetzes.

Die Wirkung zweier Stromelemente auf einander ist proportional dem Produkt der Stromstärken j und j_1 und proportional dem Produkt ihrer Längen ds und ds_1; denn ist die Stromstärke oder die Länge die doppelte, so haben wir gewissermaassen zwei Stromelemente an derselben Stelle, u. s. f. Ferner hängt die Wirkung von der Entfernung r und von der relativen Lage der beiden Elemente ab. Diese letztere wird bestimmt durch die folgenden drei Winkel: den Winkel ϑ zwischen dem Stromelement ds und der Verbindungslinie r, den Winkel ϑ_1 zwischen ds_1 und r, endlich den Winkel η zwischen den Ebenen (r, ds) und (r, ds_1). Demnach kann die Wirkung zwischen den beiden Stromelementen durch einen Ausdruck von der folgenden Form dargestellt werden:

$$W = \frac{jj_1 ds ds_1 f(\vartheta, \vartheta_1, \eta)}{r^n},$$

wo die Function $f(\vartheta, \vartheta_1, \eta)$ zu bestimmen ist, und die Zahl n; wir haben mit Ampère angenommen, es sei die Wirkung der $n$ten Potenz von r umgekehrt proportional. Unter den Richtungen der Elemente ds und ds_1 werden die der Ströme verstanden; die positive Richtung der Verbindungslinie lassen wir vorläufig unbestimmt, ebenso wie die positive Richtung der Wirkung, welche in diese Verbindungslinie fällt, und dann sind auch die Winkel ϑ, ϑ_1, η nicht völlig bestimmt.

Wir wenden zuerst den Ausdruck auf zwei besondere Fälle an; die beiden Elemente sollen immer in einer Ebene liegen, aber einmal senkrecht auf der Verbindungslinie stehen, das andere Mal in die

Verbindungslinie fallen; die Ströme sollen immer in demselben Sinne fliessen. Wir haben somit beide Mal

$$\eta = 0,$$

dagegen im ersteren Fall

$$\vartheta = \vartheta_1 = \frac{\pi}{2},$$

im letztern $\vartheta = \vartheta_1 = 0.$

Wir setzen ferner

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) = C, \qquad f(0, 0, 0) = k;$$

dann sind die Wirkungen

$$C\frac{jj_1 ds ds_1}{r^n} \quad \text{und} \quad k\frac{jj_1 ds ds_1}{r^n}.$$

Da wir noch kein Maass für die Wirkung festgesetzt haben, ebensowenig wie für die Stromstärken, können wir der einen Constanten einen beliebigen Werth beimessen; es darf nur die Wirkung nicht null sein. Das kann in dem ersteren Falle nicht eintreten, wo die Stromelemente nach dem früher Bemerkten sich anziehen; wir setzen daher $C = 1.$

In dem allgemeinen Fall, wo die Stromelemente beliebige Richtung haben, zerlegen wir jedes derselben in seine Componenten nach drei auf einander rechtwinkligen Richtungen, deren erste die Verbindungslinie r sei, und deren zweite in die Ebene (r, ds) falle. Die Componenten der Leiterelemente seien a, b, c und a_1, b_1, c_1; dann ist

$$a = \cos\vartheta\, ds, \qquad b = \sin\vartheta\, ds, \qquad c = 0;$$

$$a_1 = \cos\vartheta_1 ds_1, \qquad b_1 = \sin\vartheta_1 \cos\eta\, ds_1, \qquad c_1 = \sin\vartheta_1 \sin\eta\, ds_1.$$

Die Gesammtwirkung ist gleich der Summe der einzelnen Wirkungen zwischen den Componenten. Von diesen sechs Einzelwirkungen sind aber vier null, nach dem oben abgeleiteten Satze, nämlich die Wirkungen (a,b_1), (a,c_1), (b, a_1), (b,c_1). Es bleiben nur die beiden

$$(a, a_1) = k\frac{jj_1}{r^n} aa_1,$$

$$(b, b_1) = \frac{jj_1}{r^n} bb_1.$$

Folglich wird, wenn wir die Winkel einführen, bei beliebiger Lage der Stromelemente gegen einander

$$W = \frac{jj_1 ds ds_1}{r^n}(\sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos\eta + k\cos\vartheta \cos\vartheta_1).$$

Das Elementargesetz ist damit bestimmt bis auf die beiden Zahlen k und n.

Die Zahl n aber folgt sofort aus dem vierten Experimentalsatz, wonach die Wirkung ungeändert bleibt, wenn die Längen der beiden

Elemente in demselben Verhältniss geändert werden, wie ihre Entfernung. Hienach muss sein

$$\frac{pds \,.\, pds_1}{(pr)^n} = \frac{ds \,.\, ds_1}{r^n}$$

für jede Zahl p, oder

$$p^n = p^2;$$

folglich ist

$$n = 2\,.$$

§. 35.

Bestimmung der Constanten k. Verschiedene Formen des Elementargesetzes.

Durch den dritten Satz endlich wird auch die Zahl k bestimmt. Hiezu müssen wir aber die Wirkung berechnen, welche ein geschlossener Strom auf ein Stromelement ausübt, und dann ist es vortheilhaft, rechtwinklige Coordinaten einzuführen und die Richtungen der Stromelemente dem entsprechend auszudrücken.

Wir führen zuerst statt des Winkels η den Winkel ε ein, den die beiden Stromelemente mit einander bilden; es ist

$$\cos\varepsilon = \cos\vartheta\,\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\,\sin\vartheta_1\,\cos\eta$$

und demnach

$$W = \frac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\left\{\cos\varepsilon + (k-1)\cos\vartheta\,\cos\vartheta_1\right\}.$$

Ferner wollen wir jetzt den Sinn feststellen, in welchem die Kraft wirkt. Wir nehmen den Winkel, welchen zwei völlig bestimmte Richtungen mit einander bilden, immer zwischen 0 und π; folglich hat $\cos\varepsilon$ einen ganz bestimmten Werth, ebenso $\cos\vartheta\,\cos\vartheta_1$, wenn wir den Sinn festsetzen, in welchem die Richtung r zu nehmen sei; kehren wir aber diese Richtung um, so ändern $\cos\vartheta$ und $\cos\vartheta_1$ beide ihr Vorzeichen; das Produkt bleibt demnach ungeändert. Folglich ist der oben für die Wirkung W aufgestellte Ausdruck bis auf k völlig bestimmt. Es soll nun die Wirkung positiv gerechnet werden, wenn sie die Entfernung r zu vergrössern strebt, wenn also die Elemente sich abstossen; indem wir uns das Element, von welchem die Wirkung ausgehen soll, ruhend, das Element, auf welches die Wirkung ausgeübt wird, beweglich denken, können wir dann sagen, dass das eine Element auf das andere die Kraft W in der Richtung r ausübe, d. h. in der Richtung, in welcher r zunimmt. Nun ist aber, wenn die Elemente einander parallel sind und auf der Verbindungslinie senkrecht stehen, also für

$$\varepsilon = 0, \qquad \vartheta = \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$W = -\frac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\,.$$

In diesem Falle findet jedoch nach dem früher Bemerkten Anziehung statt; W muss also negativ genommen werden. Wir haben somit das Elementargesetz in der Form

$$W = -\frac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\{\cos\varepsilon + (k-1)\cos\vartheta\cos\vartheta_1\}$$

völlig bestimmt, auch hinsichtlich des Vorzeichens, bis auf die Zahl k.

Wir führen nun rechtwinklige Coordinaten ein. Das Stromelement ds liege an der Stelle x, y, z, das Stromelement ds_1 an der Stelle x_1, y_1, z_1; dann ist

$$r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2.$$

Ferner wird, wenn wir die Richtung der Verbindungslinie von dem Element ds_1 nach dem Element ds positiv nehmen,

$$\cos\vartheta = \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{x-x_1}{r}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y-y_1}{r}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{z-z_1}{r}\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$\cos\vartheta_1 = -\frac{\partial r}{\partial s_1} = \frac{x-x_1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial s_1} + \frac{y-y_1}{r}\frac{\partial y_1}{\partial s_1} + \frac{z-z_1}{r}\frac{\partial z_1}{\partial s_1};$$

weiter folgt

$$\frac{\partial . r\frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1} = \frac{\partial . r\frac{\partial r}{\partial s_1}}{\partial s} = -\left\{\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x_1}{\partial s_1} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y_1}{\partial s_1} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z_1}{\partial s_1}\right\} =$$

$$= r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} = -\cos\varepsilon.$$

Demnach kann gesetzt werden:

$$W = \frac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\left\{r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} + k\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right\}.$$

Beachten wir aber, dass

$$r^k\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} + kr^{k-1}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} = \frac{\partial . r^k\frac{\partial r}{\partial s_1}}{\partial s} = \frac{\partial . r^k\frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1} = \frac{1}{k+1}\frac{\partial^2 r^{k+1}}{\partial s \partial s_1},$$

so können wir auch schreiben:

$$W = -\frac{jj_1 ds ds_1}{r^{k+1}}\frac{\partial . r^k\cos\vartheta_1}{\partial s},$$

$$W = \frac{jj_1 ds ds_1}{r^{k+1}}\frac{\partial . r^k\cos\vartheta}{\partial s_1},$$

$$W = \frac{jj_1 ds ds_1}{(k+1)r^{k+1}}\frac{\partial^2 r^{k+1}}{\partial s \partial s_1},$$

wo in den beiden ersteren Formeln festzuhalten ist, dass die Richtung der Verbindungslinie von ds_1 nach ds gehe.

Wir benutzen die zweite dieser Formen, um die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement zu berechnen. Das letztere sei ds an der Stelle x, y, z, also ds_1 ein Element des geschlossenen Leiters, der einfach sei, d. h. eine einfache geschlossene Curve bilde.

Die einzelnen Elementarwirkungen haben verschiedene Richtung; wir zerlegen eine jede in zwei Componenten, die eine nach ds, die andere senkrecht darauf; die Summe der erstern muss gleich null sein, da die resultirende Kraft nach dem dritten Satze auf dem Element senkrecht stehen soll, und das giebt uns eine Gleichung zur Bestimmung von k. Diese Gleichung ist

$$0 = jj_1 ds \int_{s_1}^{s_1} \frac{\partial r^k}{\partial s_1} \frac{\cos\vartheta}{r^{k+1}} \frac{\cos\vartheta}{r^{k+1}} ds_1,$$

wo das Integral über den ganzen geschlossenen Leiter soll genommen werden. Demnach muss das Integral verschwinden. Nun folgt aber durch partielle Integration

$$\int_{s_1}^{s_1} \frac{\partial r^k}{\partial s_1} \frac{\cos\vartheta}{r^{k+1}} \frac{\cos\vartheta}{r^{k+1}} ds_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{r^{2k}\cos^2\vartheta}{r^{2k+1}}\right]_{s_1}^{s_1} + \frac{2k+1}{2}\int_{s_1}^{s_1} \frac{r^{2k}\cos^2\vartheta}{r^{2k+2}} \frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1,$$

und da das erste Glied nothwendig verschwindet, weil die Grenzen zusammenfallen, muss sein

$$(2k+1)\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos^2\vartheta}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1 = 0.$$

Finden wir also irgend einen geschlossenen Leiter, für welchen das Integral

$$J = \int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos^2\vartheta}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1$$

nicht verschwindet, so folgt mit Nothwendigkeit

$$2k + 1 = 0;$$

hiernach ist

$$k = -\frac{1}{2}.$$

Nun ist aber leicht ein besonderer Fall zu finden, wo das Integral J einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Wir haben nämlich

$$\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos^2\vartheta}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1 = -\left[\frac{\cos\vartheta}{r}\right]_{s_1}^{s_1} - 2\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos\vartheta}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} ds_1,$$

also, da das erste Glied verschwindet und

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} = \cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta_1$$

ist,

$$= -2\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos\vartheta}{r}(\cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta_1) ds_1 = -2\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos\vartheta\cos\varepsilon}{r} ds_1 + 2\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r} ds_1.$$

Vergleichen wir aber diesen Werth mit dem ursprünglichen

$$J = -\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos^2\vartheta \cos\vartheta_1}{r^2} ds_1 ,$$

so folgt

$$J = -\frac{2}{3}\int_{s_1}^{s_1} \frac{\cos\vartheta \cos\varepsilon}{r^2} ds_1 .$$

Dieses Integral ist in dem folgenden Fall leicht zu berechnen. Der Leiter s_1 habe die Form eines Rechtecks $abcd$, dessen zwei Seiten der Richtung $\alpha\beta$ des Stromelementes ds parallel, die beiden andern also darauf senkrecht seien. Dann ist für die Seite ab $\cos\varepsilon = 1$, für die Seite cd $\cos\varepsilon = -1$, für die beiden Seiten bc und da aber $\cos\varepsilon = 0$. Folglich wird

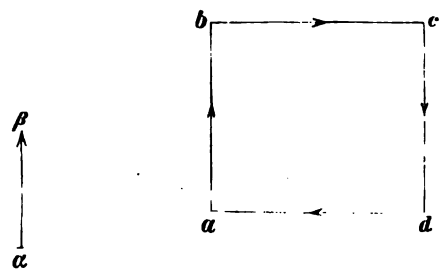


Fig. 41.

$$J = -\frac{2}{3}\int_a^b \frac{\cos\vartheta\, ds_1}{r^2} + \frac{2}{3}\int_c^d \frac{\cos\vartheta\, ds_1}{r^2} .$$

Weiter aber ist

$$\cos\vartheta = \frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{\partial r}{\partial s_1} \quad \text{für die Seite } ab,$$

$$\cos\vartheta = \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial s_1} \quad \text{für die Seite } cd,$$

weil in dem ersteren Falle die Richtungen ds und ds_1 einander parallel, in dem letztern einander entgegengesetzt sind; somit folgt endlich

$$J = -\frac{2}{3}\left\{\int_a^b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} ds_1 + \int_c^d \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} ds_1\right\}$$

oder

$$J = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_d}\right\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber nur für besondere Lagen von $\alpha\beta$; im Allgemeinen ist er von Null verschieden. Folglich muss sein

$$k = -\frac{1}{2}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obigen Formeln ein, so erhalten wir die folgenden Ausdrücke für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander:

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{cases}
W = -\dfrac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\left\{\cos\varepsilon - \dfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta_1\right\} \\
\quad = -\dfrac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\left\{\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos\eta - \dfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta_1\right\}, \\
W = \dfrac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\left\{r\dfrac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial r}{\partial s_1}\right\}, \\
W = -\dfrac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\dfrac{\partial\dfrac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{r}}}{\partial s} = \dfrac{jj_1 ds ds_1}{\sqrt{r}}\dfrac{\partial\dfrac{1}{\sqrt{r}}\dfrac{\partial r}{\partial s_1}}{\partial s}, \\
W = \dfrac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\dfrac{\partial\dfrac{\cos\vartheta}{\sqrt{r}}}{\partial s_1} = \dfrac{jj_1 ds ds_1}{\sqrt{r}}\dfrac{\partial\dfrac{1}{\sqrt{r}}\dfrac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1}, \\
W = 2\dfrac{jj_1 ds ds_1}{\sqrt{r}}\dfrac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s_1}.
\end{cases}
$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich sofort ein auffallendes Resultat. Zwei Elemente ds und ds_1, von denen das eine in der Verlängerung des andern liegt, stossen sich ab, wenn der Strom in beiden dieselbe Richtung hat; denn in diesem Falle, wo ε null und ϑ, ϑ_1 beide entweder null oder gleich π sind, giebt die erste Formel (I)

$$W = \frac{1}{2}\frac{jj_1 ds ds_1}{r^2}.$$

Also müssen auch endliche, gerade Ströme unter denselben Umständen sich abstossen. Die Erfahrung bestätigt dies. Wir legen zwei Drähte, deren Enden umgebogen sind, mit diesen Enden in drei mit Quecksilber gefüllte Rinnen, welche in einer Linie liegen. Wird ein Strom

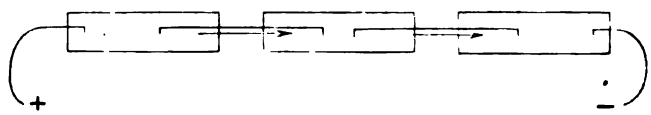


Fig. 42.

hindurchgeleitet, so entfernen sich die beiden Drahtstücke von einander; folglich findet zwischen denselben wirklich Abstossung statt.

§. 36.

Gesetz für die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement.

Das Gesetz für die Elementarwirkung zweier Stromelemente auf einander kann in dem Falle, wo das Element ds_1, welches die Wirkung ausüben soll, einem geschlossenen Strome angehört, auf eine wesentlich einfachere Form gebracht werden, und die Vereinfachung wird noch grösser, wenn auch das Element ds, auf welches die Wirkung ausgeübt wird, einem geschlossenen Strom angehört. Der letztere

Fall kommt bei der Anwendung wohl am Häufigsten vor. Wir wollen nun diese Formen ableiten.

Wir gehen dabei aus von der vierten Formel (I)

$$W = \frac{jj_1 ds ds_1}{\sqrt{r}} \frac{\partial . r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1}$$

und bilden die Componenten der Kraft nach den drei Coordinatenaxen. Diese sind, da die Kraft in die Richtung r von dem Punkt x_1, y_1, z_1 nach dem Punkt x, y, z fällt,

$$X' = jj_1 ds ds_1 \frac{x - x_1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial . r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1},$$

$$Y' = jj_1 ds ds_1 \frac{y - y_1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial . r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1},$$

$$Z' = jj_1 ds ds_1 \frac{z - z_1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial . r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1}.$$

Hieraus folgen die Componenten der Kraft, welche der ganze geschlossene Strom auf das Stromelement ds ausübt, durch Integration über den geschlossenen Leiter s_1; sie werden

$$X = jj_1 ds \int_{s_1}^{s_1} \frac{x - x_1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial . r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1} ds_1,$$

oder

$$X = \frac{jj_1 ds}{2} \int_{s_1}^{s_1} \left\{ \partial \frac{x - x_1}{r^2} \frac{\frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1} + \frac{(x - x_1)^2}{r^3} \partial \frac{\frac{r}{x - x_1} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1} \right\} ds_1,$$

oder endlich, da wir das Differential unter dem Integralzeichen weglassen können,

$$X = \frac{1}{2} jj_1 ds \int_{s_1}^{s_1} \frac{(x - x_1)^2}{r^3} \frac{\partial \frac{\frac{r}{x - x_1} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1}}{} ds_1, \qquad \text{u. s. w.}$$

Nun ist aber

$$\frac{\frac{r}{x - x_1} \frac{\partial r}{\partial s}}{} = \frac{dx}{ds} + \frac{y - y_1}{x - x_1} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z_1}{x - x_1} \frac{dz}{ds},$$

folglich

$$\frac{(x - x_1)^2}{r^3} \frac{\partial \frac{\frac{r}{x_1 - x} \frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s_1}}{} = \frac{(y - y_1) dx_1 - (x - x_1) dy_1}{r^3} \frac{dy}{ds} + \frac{(z - z_1) dx_1 - (x - x_1) dz_1}{r^3} \frac{dz}{ds},$$

und somit können wir schreiben

$$(II)\quad \begin{cases} X = \dfrac{jj_1}{2}\displaystyle\int_{s_1}^{s_1} \{(y-y_1)dx_1 - (x-x_1)dy_1\}\dfrac{dy}{r^3} + \{(z-z_1)dx_1 - (x-x_1)dz_1\}\dfrac{dz}{r^3}, \\ Y = \dfrac{jj_1}{2}\displaystyle\int_{s_1}^{s_1} \{(z-z_1)dy_1 - (y-y_1)dz_1\}\dfrac{dz}{r^3} + \{(x-x_1)dy_1 - (y-y_1)dx_1\}\dfrac{dx}{r^3}, \\ Z = \dfrac{jj_1}{2}\displaystyle\int_{s_1}^{s_1} \{(x-x_1)dz_1 - (z-z_1)dx_1\}\dfrac{dx}{r^3} + \{(y-y_1)dz_1 - (z-z_1)dy_1\}\dfrac{dy}{r^3}. \end{cases}$$

Diese Formeln können zur Anwendung gebracht werden, wenn die Wirkung von einem geschlossenen Strome ausgeht.

§. 37.

Fall einer fortdauernden Rotation.

Eine solche Anwendung wollen wir gleich machen, und zwar auf einen Fall, welcher die Eigenthümlichkeit der wirkenden Kräfte in deutlichem Licht darstellt. Er zeichnet sich dadurch aus, dass kein Gleichgewicht stattfinden kann, sondern eine Rotation hervorgerufen wird, deren Beschleunigung nur die Reibung ein Ziel setzt. Solche Fälle haben die Aufmerksamkeit der Experimentatoren vielfach in Anspruch genommen.

Der einfache Fall, den wir hier betrachten wollen, ist der folgende: In einem sehr langen geraden Draht, den wir als Theil eines unendlich grossen Kreises betrachten können, fliesst ein Strom; wir berechnen seine Wirkung auf ein Stromelement $j\,ds$, welches mit der Geraden in einer Ebene liege. Nehmen wir einen unendlich grossen Kreisstrom an, so wird die Wirkung der unendlich weit entfernten Theile auf das Stromelement gleich null; wir können demnach, um die Wirkung des geraden Stromes auf das Stromelement zu berechnen, die Formel anwenden, welche die Wirkung geschlossener Ströme bestimmt.

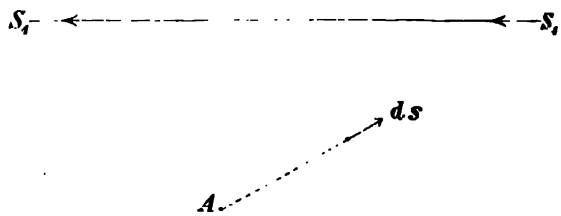


Fig. 43.

Wir nehmen die Ebene des Stromes und des Stromelementes als (x, y)-Ebene. Der Anfangspunkt der Coordinaten liege in A, in der Verlängerung des Stromelementes ds, und in dem Abstand b von dem geraden Strom. Die Richtung der x-Axe falle mit der Richtung des Stromes s_1 zusammen. Dann haben wir:

$$ds_1 = dx_1, \quad y_1 = b, \quad z_1 = 0, \; dy_1 = 0, \quad dz_1 = 0;$$
$$z = 0. \quad dz = 0.$$

Folglich sind die Componenten der Wirkung auf das Stromelement

$$X = -\frac{jj_1}{2}(b-y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_1}{r^3},\quad Y = \frac{jj_1}{2}(b-y)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_1}{r^3},\quad Z = 0.$$

Die resultirende Kraft muss auf dem Stromelement senkrecht stehen; wir haben auch

$$X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Weiter ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_1}{r^3} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_1}{\{(x_1-x)^2+(b-y)^2\}^{3/2}} = \left[\frac{x_1-x}{(b-y)^2\sqrt{(x_1-x)^2+(b-y)^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{(b-y)^2}.$$

Die beiden Componenten werden also

$$X = -\frac{jj_1\,dy}{b-y},\qquad Y = \frac{jj_1\,dx}{b-y},$$

und ihre Resultante ist

$$R = \frac{jj_1\,ds}{b-y};$$

sie steht senkrecht auf dem Stromelement, und der Sinn, in welchem sie wirkt, folgt aus den Werthen von X und Y.

Der Strom fliesse von rechts nach links, wie in der Figur angedeutet; die y-Axe werde nach oben positiv gerechnet; das Stromelement liege unterhalb des Stromes. Dann ist $b - y$ positiv. Folglich hat X entgegengesetztes Vorzeichen mit dy, Y gleiches Vorzeichen mit dx. Die Kraft steht demnach so zu dem Stromelement, wie die y-Axe zur x-Axe. Denken wir uns das Stromelement um den Punkt A drehbar, und fliesst der Strom in dem Element von A fort, so strebt die Kraft dasselbe im Sinne des Uhrzeigers herumzudrehen, und da die Kraft R niemals null wird, nimmt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung unbegrenzt zu, so lange wir von der Reibung absehen.

Dasselbe muss für einen geraden Strom $s's''$ von endlicher Länge gelten, wenn der Drehungspunkt A ausserhalb der Strecke $s's''$ liegt und der Strom $s's''$ immer ganz auf der einen Seite des Stromes $s_1 s_1$ bleibt. Denn die Kräfte, welche auf alle Elemente des Stromes $s's''$ ausgeübt werden, streben dann eine Drehung in demselben Sinne hervorzubringen.

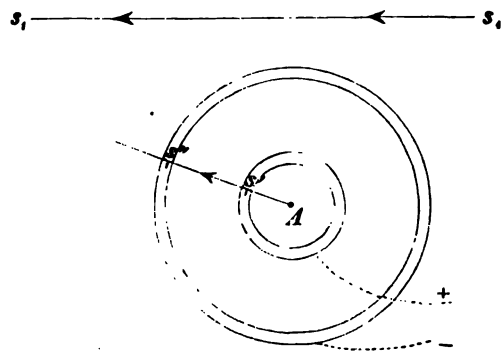


Fig. 44.

Dieser Fall wird folgendermaassen experimentell

hergestellt: Man umgiebt die Stelle A mit zwei kreisförmigen Rinnen und füllt diese mit Quecksilber; in dieses taucht ein Metallstab, der um A drehbar ist, mit den Spitzen s' und s'' ein. Verbindet man dann die innere Rinne mit dem positiven, die äussere Rinne mit dem negativen Pol einer Säule, so erhält man den um A drehbaren geraden Strom $s's''$.

Wir wollen noch das Drehungsmoment berechnen, welches auf das endliche Leiterstück $s's''$ ausgeübt wird; dasselbe ist, wenn wir den Abstand von der Stelle A mit s bezeichnen, und den Winkel mit φ, den der gerade Strom mit der x-Axe bildet,

$$L = jj_1 \int_{s'}^{s''} \frac{s\,ds}{b - s\,.\sin\varphi},$$

oder

$$L = -\frac{jj_1}{\sin\varphi}\left[s + \frac{b}{\sin\varphi}\log(b - s\,.\sin\varphi)\right]_{s'}^{s''}$$

$$= -\frac{jj_1}{\sin\varphi}\left\{s'' - s' + \frac{b}{\sin\varphi}\log\frac{b - s''\sin\varphi}{b - s'\sin\varphi}\right\},$$

oder endlich, wenn wir den log. nach steigenden Potenzen von $\frac{s'}{b}$ und $\frac{s''}{b}$ entwickeln,

$$L = jj_1\left\{\frac{s''^2 - s'^2}{2b} + \frac{s''^3 - s'^3}{3b^2}\sin\varphi + \frac{s''^4 - s'^4}{4b^3}\sin^2\varphi + \cdots\right\}.$$

Nennen wir das Trägheitsmoment des Leiterstückes M, und vernachlässigen wir die Reibung an der Axe und im Quecksilber, so ergiebt sich für die Drehung die Differentialgleichung

$$M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = jj_1\left\{\frac{s''^2 - s'^2}{2b} + \frac{s''^3 - s'^3}{3b^2}\sin\varphi + \frac{s''^4 - s'^4}{4b^3}\sin^2\varphi + \cdots\right\}.$$

Durch Integration folgt für $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ ein Werth, der neben periodischen Gliedern ein Glied mit dem Factor φ enthält, wegen der ungeraden Glieder in der Reihenentwicklung, namentlich wegen des ersten. Die Winkelgeschwindigkeit des Leiterstückes wird demnach so lange zunehmen, bis durch die Reibung der Zuwachs gerade aufgehoben wird, und von da an wird die Rotation mit constanter Geschwindigkeit unbegrenzt fortdauern.

Hiebei war immer angenommen, es sei $b > s'' > s'$. Ist dies nicht der Fall, geht also das Leiterstück über den wirkenden Strom hinweg, so haben die Kräfte für verschiedene Stellen des Stromes $s's''$ verschiedenes Vorzeichen; ferner wird dann für eine Stelle $b - y$ null, die Kraft also unendlich gross. Wir nehmen damit auch einen Fall an, der nicht realisirbar ist; die Ströme sollen sich nicht schneiden. Die Schwierigkeit fällt fort, wenn wir die beiden Ströme nicht in dieselbe Horizontalebene legen; wir haben dann z_1 nicht gleich 0, sondern gleich c zu setzen. Auch in diesem Falle ist die Integration vollständig durchzuführen; es kann aber nun eine Gleichgewichtslage des be-

weglichen Stromes geben. Die Rechnung wird besonders einfach, wenn die Rotationsaxe durch den wirkenden Strom geht; die stabile Gleichgewichtslage ist dann die, wo die Leiter parallel sind und die Ströme in demselben Sinne fliessen.

§. 38.

Betrachtung der Elementarwirkung in dem Fall, wo das wirkende Element einem geschlossenen Strom angehört.

Wir kehren zu den Ausdrücken (II) zurück, welche die Elementarwirkung für den Fall bestimmen, wo das wirkende Element einem geschlossenen Strome angehört, und geben diesen Ausdrücken eine übersichtlichere Form. Wir wollen das Dreieck, welches durch das Leiterelement ds_1 und die Verbindungslinie r bestimmt wird, die Elementarfläche nennen; unter der Richtung ds_1 werde immer die Richtung verstanden, in welcher der Strom fliesst, unter der Richtung r die Richtung von dem wirkenden Element ds_1 nach der Stelle ds; die Normale der Elementarfläche endlich nehmen wir immer in dem Sinne positiv, dass diese Richtung zu den Richtungen ds_1 und r so steht, wie die Richtung der positiven z zu den positiven x und y. Dann sind die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf die Elementarfläche mit den Coordinatenaxen bildet,

$$\alpha = \frac{(z-z_1)dy_1 - (y-y_1)dz_1}{r\,ds_1 \sin\vartheta_1},$$

$$\beta = \frac{(x-x_1)dz_1 - (z-z_1)dx_1}{r\,ds_1 \sin\vartheta_1},$$

$$\gamma = \frac{(y-y_1)dx_1 - (x-x_1)dy_1}{r\,ds_1 \sin\vartheta_1}.$$

Die Componenten der Elementarwirkung können demnach in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} X' = \frac{1}{2} jj_1 \frac{\gamma dy - \beta dz}{r^2} \sin\vartheta_1 ds_1, \\ Y' = \frac{1}{2} jj_1 \frac{\alpha dz - \gamma dx}{r^2} \sin\vartheta_1 ds_1, \\ Z' = \frac{1}{2} jj_1 \frac{\beta dx - \alpha dy}{r^2} \sin\vartheta_1 ds_1. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich die beiden Sätze:

$$X'dx + Y'dy + Z'dz = 0,$$

die Kraft steht senkrecht auf dem Stromelement ds, und

$$X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma = 0,$$

die Kraft steht auch senkrecht auf der Normale der Elementarfläche. Folglich liegt die Kraft in der Elementarfläche und steht senkrecht auf dem Stromelement ds.

Wir können die Richtung dieser Kraft noch weiter festsetzen. Es bezeichne ν die Richtung der Normale auf die Elementarfläche, so dass

$$\cos(\nu, x) = \alpha, \quad \cos(\nu, y) = \beta, \quad \cos(\nu, z) = \gamma;$$

ferner bedeute σ diejenige Richtung, welche auf den Richtungen ds und ν senkrecht steht, in dem Sinne positiv gerechnet, dass σ in Bezug auf die Richtungen ds und ν so liegt, wie die z-Axe zu den Axen x und y. Dann ist, dem Obigen analog,

$$\cos(\sigma, x) = \frac{\gamma\, dy - \beta\, dz}{\sin(\nu, ds)\, ds},$$

$$\cos(\sigma, y) = \frac{\alpha\, dz - \gamma\, dx}{\sin(\nu, ds)\, ds},$$

$$\cos(\sigma, z) = \frac{\beta\, dx - \alpha\, dy}{\sin(\nu, ds)\, ds}.$$

Führen wir diese Werthe in die Formeln (III) ein, so erhalten wir

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} X' = \frac{1}{2}\frac{j j_1 ds ds_1}{r^2} \sin\vartheta_1 \sin(\nu, ds) \cos(\sigma, x), \\ Y' = \frac{1}{2}\frac{j j_1 ds ds_1}{r^2} \sin\vartheta_1 \sin(\nu, ds) \cos(\sigma, y), \\ Z' = \frac{1}{2}\frac{j j_1 ds ds_1}{r^2} \sin\vartheta_1 \sin(\nu, ds) \cos(\sigma, z). \end{cases}$$

Folglich bestimmt die oben definirte Richtung σ die Richtung der Kraft, welche das Stromelement $j_1 ds_1$ auf das Stromelement $j ds$ ausübt, und die Grösse der Kraft ist

$$R = \frac{1}{2}\frac{j j_1 ds ds_1}{r^2} \sin\vartheta_1 \sin(\nu, ds).$$

Dieser Werth ist immer positiv; der Sinn, in welchem die Kraft wirkt, ist mit σ eindeutig festgestellt. Die Kraft ist proportional dem Sinus des Winkels, den das Stromelement ds_1 mit der Verbindungslinie bildet, ferner proportional $\sin(\nu, ds)$, also proportional dem Cosinus des Winkels, den das Stromelement ds mit der Elementarfläche (ds_1, r) bildet. Wir können auch sagen: die Kraft ist proportional der Componente des Stromelementes $j_1 ds_1$ senkrecht auf die Verbindungslinie, [illegible] $\sin\vartheta_1$, ferner proportional der Projection des Stromelementes $j ds$ auf die Elementarfläche, $ds \sin(\nu, ds)$, endlich umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung. Die Wirkung ist null, wenn das Stromelement [illegible] in die Verbindungslinie fällt, oder wenn das Stromelement [illegible] auf der Elementarfläche senkrecht steht*.

[illegible] Gleichungen (IV) das Stromelement $j_1 ds_1$ [illegible] Grassmann als Elementargesetz [illegible] angenommen. Neue Theorie der [illegible] wenn die [illegible] Folgerungen führen. [illegible] übereinstimmen. [illegible] Clau- [illegible] Crelle [illegible]

Die Richtung, welche wir so für die Kraft gefunden haben, erinnert an das oben erwähnte Biot-Savartsche Gesetz.

§. 39.

Wirkung zwischen zwei Elementen, welche beide geschlossenen Strömen angehören; diese Wirkung wird durch ein Potential bestimmt.

Wir suchen drittens die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen andern geschlossenen Strom. Hiebei betrachten wir den geschlossenen Strom, auf welchen die Wirkung ausgeübt wird, als einen starren Körper. Dann können die Kräfte, welche an den einzelnen Stromelementen angreifen, immer ersetzt werden durch eine Einzelkraft, welche in einem bestimmten Punkt angreift, und durch eine Koppelkraft, welche eine blosse Drehung anstrebt. Wir berechnen zunächst die Componenten der resultirenden Kraft; diese sollen jetzt mit X, Y, Z bezeichnet werden; sie sind gleich den Summen von den Componenten der einzelnen wirkenden Kräfte.

Da die Wirkung von einem geschlossenen Strom ausgeht, können wir die Gleichungen (II) zur Anwendung bringen und finden

$$X = \frac{jj_1}{2} \int_s \int_{s_1} \frac{\{(y-y_1)\,dx_1 - (x-x_1)\,dy_1\}\,dy + \{(z-z_1)\,dx_1 - (x-x_1)\,dz_1\}\,dz}{r^3},$$

wo die Integrationen über die beiden geschlossenen Leiter s_1 und s auszudehnen sind; die Reihenfolge ist gleichgiltig, da r niemals verschwinden soll. Für den Zähler unter dem Integral kann aber geschrieben werden:

$$\{(x-x_1)\,dx + (y-y_1)\,dy + (z-z_1)\,dz\}\,dx_1 - (x-x_1)\,(dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1),$$

also für die Grösse unter dem Integral

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\,ds\,dx_1 - \frac{x-x_1}{r^3}\cos(ds, ds_1)\,ds\,ds_1,$$

und das Integral in Bezug auf s von dem ersten Theil verschwindet. Folglich wird:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} X = -\frac{jj_1}{2} \int_{s_1} \int_s \frac{x-x_1}{r^3} \cos(ds, ds_1)\,ds\,ds_1, \\ Y = -\frac{jj_1}{2} \int_{s_1} \int_s \frac{y-y_1}{r^3} \cos(ds, ds_1)\,ds\,ds_1, \\ Z = -\frac{jj_1}{2} \int_{s_1} \int_s \frac{z-z_1}{r^3} \cos(ds, ds_1)\,ds\,ds_1, \end{cases}$$

indem die Werthe von Y und Z auf demselben Wege abgeleitet werden.

Nun sind aber $\frac{x-x_1}{r}$, $\frac{y-y_1}{r}$, $\frac{z-z_1}{r}$ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Verbindungslinie r von ds_1 nach ds mit den Coordinatenaxen bildet; folglich erhalten wir dieselbe resultirende Kraft, wenn wir annehmen, dass die beiden Stromelemente jds und $j_1 ds_1$ sich anziehen mit der Kraft

$$\frac{1}{2} \frac{jj_1 ds\, ds_1 \cos(ds, ds_1)}{r^2};$$

die Elementarwirkung wäre also proportional dem Cosinus des Winkels, den die beiden Stromelemente mit einander bilden, und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung.

Viel wichtiger ist, dass die Ausdrücke unter den Integralen in der Form von Differentialquotienten nach x, y, z können dargestellt werden; es ist

$$\frac{x-x_1}{r^3} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus folgt nämlich, dass die Wirkung zwischen geschlossenen Strömen durch ein Potential bestimmt wird.

Wir setzen

$$\text{(VI)} \qquad P = -\frac{jj_1}{2} \int_{s_1}^{s_1} \int^{s} \frac{\cos(ds, ds_1)}{r}\, ds\, ds_1,$$

und nennen P das Potential des Stromes s_1 auf den Strom s, oder des Stromes s auf den Strom s_1; denn der Ausdruck bleibt unverändert bei Vertauschung der beiden Ströme mit einander. Bei gegebener Lage der beiden Ströme hat P einen völlig bestimmten Werth.

Wir müssen uns weiter den Strom, auf welchen die Wirkung ausgeübt wird, beweglich denken, entweder parallel mit sich selbst verschiebbar in einer beliebigen Richtung, oder drehbar um eine Axe, die durch einen bestimmten Punkt geht. Wir setzen das näher fest. Ein Punkt A sei fest verbunden mit dem Strome s; seine Coordinaten seien a, b, c. Wir legen ferner durch A drei Gerade parallel den drei Coordinatenaxen. Nun soll das ganze System sowohl in den Richtungen der drei Axen parallel mit sich selbst verschoben, als auch um die drei durch die Stelle A gelegten Axen gedreht werden; damit die Reihenfolge dieser Bewegungen gleichgiltig sei, können wir alle Verschiebungen und Drehungen unendlich klein annehmen. Bei einer Verschiebung ändern sich a, b, c; die Drehungswinkel um die drei Axen aber seien α. β, γ. Dann wird das Potential des festen Stromes s_1 auf den beweglichen Strom s eine Function von a, b, c, α, β, γ, und wir können den folgenden Satz aussprechen:

Die Wirkung des Stromes s_1 auf den Strom s kann ersetzt werden durch eine Kraft, die in dem Punkte A an-

greift, und deren Componenten den Differentialquotienten des Potentiales P nach den Coordinaten a, b, c entgegengesetzt gleich sind, und durch eine Koppel, deren Componenten nach den drei Coordinatenaxen durch die negativen Differentialquotienten des Potentiales P nach α, β, γ bestimmt werden.

Der erste Theil des Satzes ist nach dem eben Gefundenen sofort bewiesen; wir müssen nur zeigen, dass

$$X = -\frac{\partial P}{\partial a}.$$

Wir setzen

$$x = a + \xi, \qquad y = b + \eta, \qquad z = c + \zeta,$$
$$dx = d\xi, \qquad dy = d\eta, \qquad dz = d\zeta;$$

dann wird

$$P = \frac{jj_1}{2}\int_{s_1}\int_{s}\frac{d\xi\,dx_1 + d\eta\,dy_1 + d\zeta\,dz_1}{\{(a+\xi-x_1)^2+(b+\eta-y_1)^2+(c+\zeta-z_1)^2\}^{1/2}}.$$

Diesen Ausdruck können wir nach a, b oder c differentiiren und finden

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{jj_1}{2}\int_{s_1}\int_{s}\frac{(a+\xi-x_1)(d\xi\,dx_1+d\eta\,dy_1+d\zeta\,dz_1)}{\{(a+\xi-x_1)^2+(b+\eta-y_1)^2+(c+\zeta-z_1)^2\}^{3/2}};$$

dies ist aber der oben für $-X$ gefundene Werth.

Nicht so einfach ist der Beweis des zweiten Theiles, da wir die Drehungsmomente noch berechnen müssen.

Es sei der Strom s um eine Axe drehbar, welche parallel der x-Axe durch die Stelle a, b, c gelegt wird. Wir berechnen das Drehungsmoment der Kräfte, welche auf die Elemente ds des Stromes ausgeübt werden. Diese Kräfte werden durch die Formeln (II) bestimmt; auf das Element ds an der Stelle x, y, z wirkt also die Kraft

$$-\frac{jj_1}{2}\int_{s_1}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx_1}{ds_1}+\frac{x-x_1}{r^3}\cos(ds, ds_1)\right\}ds\,ds_1,$$

u. s. w.

Folglich wird das gesuchte Drehungsmoment

$$L = -\frac{jj_1}{2}\int_{s_1}\int_{s}\left\{\begin{array}{l}\left[(y-b)\frac{dz_1}{ds_1}-(z-c)\frac{dy_1}{ds_1}\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\\ +\frac{(y-b)(z-z_1)-(z-c)(y-y_1)}{r^3}\cos(ds, ds_1)\end{array}\right\}ds\,ds_1.$$

Wir formen das erste Glied durch partielle Integration nach s um und finden

$$L = \frac{jj_1}{2}\int_{s_1}\int_{s}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{r}\left(\frac{dy}{ds}\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dz}{ds}\frac{dy_1}{ds_1}\right)\\ -\frac{(y-b)(z-z_1)-(z-c)(y-y_1)}{r^3}\cos(ds, ds_1)\end{array}\right\}ds\,ds_1.$$

Wir haben zweitens $\frac{\partial P}{\partial \alpha}$ zu bilden, wo $\partial\alpha$ eine unendlich kleine Drehung um die Gerade bedeutet, welche parallel der x-Axe durch die Stelle a, b, c gelegt ist, und wo

$$P = -\frac{jj_1}{2}\int_{s_1}\int_{s}\frac{\cos(ds, ds_1)}{r}\,ds\,ds_1 .$$

Unter dem Integral sind r und $\cos(ds, ds_1)$ von α abhängig. Und zwar haben wir

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -(z-c), \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = y-b,$$

folglich

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} = -\frac{(x-x_1)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + (y-y_1)\frac{\partial y}{\partial \alpha} + (z-z_1)\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{r^3}$$

$$= \frac{(y-y_1)(z-c)-(z-z_1)(y-b)}{r^3};$$

ferner wird

$$\frac{\partial \cdot \cos(ds, ds_1)\,ds\,ds_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial\,(dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1)}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{\partial\, dx}{\partial \alpha}\,dx_1 + \frac{\partial\, dy}{\partial \alpha}\,dy_1 + \frac{\partial\, dz}{\partial \alpha}\,dz_1$$

$$= d\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,dx_1 + d\frac{\partial y}{\partial \alpha}\,dy_1 + d\frac{\partial z}{\partial \alpha}\,dz_1$$

$$= -dz\,dy_1 + dy\,dz_1 .$$

Folglich ergiebt sich

$$\frac{P}{\partial \alpha} = -\frac{jj_1}{2}\int_{s_1}\int_{s}\left\{\frac{dy\,dz_1 - dz\,dy_1}{r} + \frac{(y-y_1)(z-c)-(z-z_1)(y-b)}{r^3}\cos(ds, ds_1)\,ds\,ds_1\right\}.$$

Dieser Werth ist aber dem oben für L gefundenen entgegengesetzt gleich.

Mithin werden die Componenten der resultirenden Kraft

$$X = -\frac{\partial P}{\partial a}, \qquad Y = -\frac{\partial P}{\partial b}, \qquad Z = -\frac{\partial P}{\partial c},$$

und die Componenten der resultirenden Koppel

$$L = -\frac{\partial P}{\partial \alpha}, \qquad M = -\frac{\partial P}{\partial \beta}, \qquad N = -\frac{\partial P}{\partial \gamma}.$$

§ 4.

Anwendung auf die Theorie des Rheometers.

Wir machen von dem eben gefundenen Satz Gebrauch, um die Theorie eines sehr nützlichen Instrumentes zu entwickeln, dem wir den Namen Rheometer geben wollen. Dasselbe liefert eine absolute

Bestimmung der Stromstärke, ganz unabhängig von den Aenderungen der erdmagnetischen Kraft.

Der bewegliche Theil des Instrumentes besteht aus einem bifilar aufgehängten Stab, der an seinen beiden Enden zwei mit Draht umwundene Rollen trägt. Durch die beiden Rollen wird derselbe Strom, aber in entgegengesetzter Richtung geleitet. Der Strom kann durch die Aufhängungsdrähte ein- und ausgeleitet werden; allein da diese immer dünn sind, entsteht dadurch eine bedeutende Stromschwächung, und es ist deshalb zweckmässiger, die Drahtenden herunter zu führen und in Quecksilbernäpfchen eintauchen zu lassen; die Spitzen müssen genau in der Drehungsaxe liegen. Die hierdurch entstehende Reibung ist sehr unbedeutend und trägt, wenn die Schwingungen um die Ruhelage beobachtet werden, zur Abnahme der Amplituden kaum merklich bei.

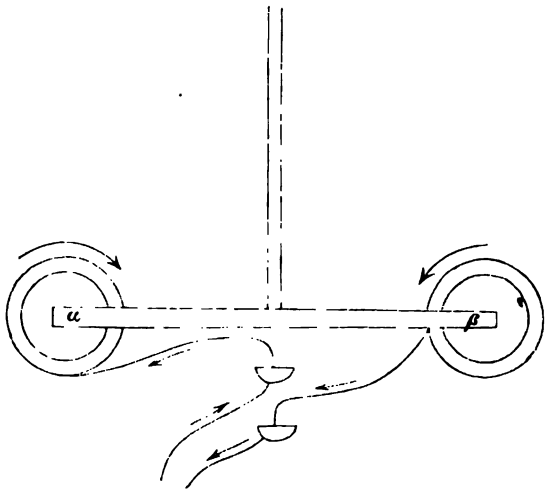


Fig. 45.

Die Ströme haben in den beiden Rollen die entgegengesetzte Richtung, damit der Erdmagnetismus auf den Apparat keine Wirkung ausübe. Die Rollen müssen also einander möglichst gleich sein, namentlich gleiche Zahl von Drahtwindungen haben. Dass der gewünschte Zweck erreicht sei, wird leicht erkannt, indem man mittelst der bifilaren Aufhängung dem Hebelarm verschiedene Stellungen giebt; es darf nie eine Aenderung dieser Stellungen stattfinden, wenn ein Strom durch die Rollen geleitet wird.

Der andere Theil des Apparates besteht aus vier fest aufgestellten Rollen. Sie haben alle genau die Grösse der an dem Hebelarm befestigten Rollen und sind mit ihren Seitenflächen vertical und parallel so aufgestellt, dass die Mittelpunkte aller sechs Rollen in einer Horizontalebene liegen. Die Figur 46 giebt die Projection auf diese Horizontalebene. Die Rollen 1 und 2,

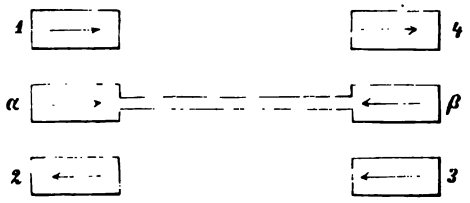


Fig. 46.

ebenso 3 und 4 haben gemeinsame Axe; 1 und 4, 2 und 3 stehen ebensoweit von einander ab, als die beweglichen Rollen α und β; endlich stehen 1 und 2 gleich weit von einander, wie 3 und 4. In allen sechs Rollen fliesst derselbe Strom in den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen, so dass die sämmtlichen Wirkungen sich addiren; die Rolle 1 zieht α, 3 β an, während 2 α und 4 β abstösst.

Gleichgewicht findet statt, wenn das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung gerade die Wirkung der festen Rollen auf die beweglichen aufhebt. Das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung aber ergiebt sich aus dem beobachteten Ablenkungswinkel φ, aus dem Abstand und der Länge der Aufhängungsfäden, endlich aus dem Gewicht des ganzen Apparates; folglich wird die Stromstärke, von welcher die elektrodynamische Wirkung abhängt, durch ein Gewicht bestimmt, ganz unabhängig vom Erdmagnetismus.

Wir haben nun das elektrodynamische Drehungsmoment zu berechnen, welches die festen Rollen auf die beweglichen ausüben.

Wir sehen dabei ab von der Wirkung der Rollen 1 und 2 auf β und der Rollen 3 und 4 auf α. Der Abstand der Rollen 1 und 4 ist etwa viermal so gross, als der Abstand der Rollen 1 und 2; die Entfernungen zwischen Stellen der Rollen 1 und β sind dann etwa zehnmal so gross, wie die zwischen Stellen der Rollen 1 und α; ferner stehen die Richtungen der erstern Kräfte sehr schief auf dem Hebelarm. Die vernachlässigten Wirkungen sind also jedenfalls sehr klein. Man kann diese Wirkungen wohl berechnen: aber die Reihen, welche man erhält, sind sehr complicirt; doch überzeugt man sich auf diesem Wege, dass die Vernachlässigung bei den angegebenen Dimensionen gestattet ist.

Wir brauchen bloss das Potential der Rolle 1 auf die Rolle α zu berechnen; die drei andern folgen daraus sehr einfach. Wir nennen das Potential P und haben

$$P = \frac{i i_1}{c^2} \int\int \frac{\cos ds, ds_1}{E} ds\, ds_1 ,$$

wenn E die Entfernung der beiden Elemente ds und ds_1 bezeichnet und die Integrale über die beiden geschlossenen Ströme genommen werden. Nun ist aber

$$E^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

folglich

$$\frac{\partial E^2}{\partial s\, ds_1} = 2 \frac{dx\, dx_1 + dy\, dy_1 + dz\, dz_1}{ds\, ds_1} = 2 \cos(ds, ds_1),$$

und somit

$$P = \frac{i i_1}{2 c^2} \int\int \frac{\partial^2 E^2}{\partial s\, \partial s_1} ds\, ds_1 .$$

Wir können uns die Rollen aus Kreisströmen zusammengesetzt denken. Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Drehungs-

axe, lassen die x-Axe mit der Richtung des Hebelarmes zusammenfallen, wenn die Rolle α gerade in der Mitte zwischen den Rollen 1 und 2 steht, und nehmen die y-Axe darauf senkrecht in der Horizontalebene, die z-Axe also vertical. Ferner liege der Mittelpunkt der Rolle α um a von der Drehungsaxe entfernt. Wir haben dann für einen Kreisstrom der Rolle 1 von dem Halbmesser r_1

$$x_1 = a + r_1 \cos\psi_1\,, \qquad y_1 = b_1\,, \qquad z_1 = r_1 \sin\psi_1\,,$$

und für einen Kreisstrom der Rolle α von dem Halbmesser r, wenn die Mittellage stattfindet,

$$x = a + r\cos\psi\,, \qquad y = b\,, \qquad z = r\sin\psi\,,$$

wenn dagegen der Hebel um φ aus dieser Mittellage gedreht ist,

$$\begin{aligned} x &= (a + r\cos\psi)\cos\varphi - b\sin\varphi\,,\\ y &= (a + r\cos\psi)\sin\varphi + b\cos\varphi\,,\\ z &= r\sin\psi\,. \end{aligned}$$

Mithin wird:

$$\begin{aligned}(2)\quad E^2 = {} & r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\psi-\psi_1) + (b-b_1)^2 + \\ & + 2\{b(a+r_1\cos\psi_1) - b_1(a+r\cos\psi)\}\sin\varphi + \\ & + 2\{a^2 + a(r\cos\psi + r_1\cos\psi_1) + rr_1\cos\psi\cos\psi_1 + bb_1\}(1-\cos\varphi).\end{aligned}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{\partial^2 E^2}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{1}{rr_1}\frac{\partial^2 E^2}{\partial\psi\,\partial\psi_1} = -2\{\cos(\psi-\psi_1) - \sin\psi\sin\psi_1(1-\cos\varphi)\},$$

und es ergiebt sich

$$(3)\qquad P = -\frac{jj_1 rr_1}{2}\int\int \frac{\cos(\psi-\psi_1) - \sin\psi\sin\psi_1(1-\cos\varphi)}{E}\,d\psi\,d\psi_1\,.$$

Wir bilden nun den Ausdruck $-\dfrac{\partial P}{\partial\varphi}$, welcher das gesuchte Drehungsmoment liefert.

Differentiiren wir unter dem Integral nach φ, was gestattet ist, und entwickeln wir dann die Function unter dem Integral in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi$, so muss nach Ausführung der Integrale eine Reihe entstehen von der folgenden Form

$$A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi + \ldots.$$

Diese stellt das Drehungsmoment dar, welches die Rolle 1 auf die Rolle α ausübt. Das Drehungsmoment, welches von der Wirkung der Rolle 2 auf die Rolle α herrührt, muss folgen, wenn wir statt $+\varphi$ $-\varphi$ setzen; die Wirkung der beiden Rollen 1 und 2 zusammen wird also durch die doppelte Summe von den ungeraden Gliedern der Reihe dargestellt, und die Gesammtwirkung erhalten wir durch nochmalige Verdoppelung, indem die Wirkung der Rollen 3 und 4 auf β noch hinzu-

kommt. Demnach wird das von den vier festen Rollen ausgeübte Drehungsmoment dargestellt durch die Reihe

$$N = 4A + 4C \sin^2 \varphi + \ldots .$$

Ist nun der Winkel φ sehr klein, so können alle Glieder neben dem ersten vernachlässigt werden, und wir haben

$$N = 4A,$$

also constant. Dies wird immer der Fall sein, wenn die Beobachtung der Ablenkung mittelst Spiegel und Fernrohr stattfindet. Dagegen können wir bei den sogenannten Handrheometern, wo die Ablenkung an einem getheilten Kreise abgelesen wird, diese Annahme nicht machen; denn die Ablenkungswinkel betragen dann unter Umständen 10^0 und mehr. Wir werden später einen Weg angeben, um auch in diesem Falle die Berücksichtigung der höheren Glieder zu umgehen.

Vorerst berechnen wir den Werth von A, indem wir P nach φ differentiiren und dann $\varphi = 0$ setzen. So folgt

$$(4) \qquad A = \frac{jj_1 r r_1}{2} \int\int \frac{\cos(\psi - \psi_1)\{b_1(a + r\cos\psi) - b(a + r_1\cos\psi_1)\}}{\{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\psi - \psi_1) + (b - b_1)^2\}^{3/2}} d\psi\, d\psi_1 .$$

Wir nehmen den Theil dieses Ausdrucks, welcher von der Wirkung eines Kreisstromes der Rolle 1 auf einen Kreisstrom der Rolle α herrührt; die beiden Kreisströme werden durch die Werthe von b_1 und b bestimmt. Es ist dieser Theil

$$A' = \frac{jj_1 r r_1}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi - \psi_1)\{b_1(a + r\cos\psi) - b(a + r_1\cos\psi_1)\}}{\{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\psi - \psi_1) + (b - b_1)^2\}^{3/2}} d\psi\, d\psi_1 .$$

Setzen wir nun

$$\psi_1 - \psi = p, \qquad d\psi_1 = dp,$$

so werden die Grenzen von p eigentlich $-\psi$ und $2\pi - \psi$; wir können dafür aber auch die Grenzen 0 und 2π nehmen und erhalten

$$A' = \frac{jj_1 r r_1}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos p\{b_1[a + r\cos\psi] - b[a + r_1\cos(\psi + p)]\}}{\{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos p + (b - b_1)^2\}^{3/2}} d\psi\, dp,$$

oder, durch Ausführung der Integration nach ψ,

$$(5) \qquad A' = \pi jj_1 r r_1 \alpha(b_1 - b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\, dp}{\{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos p + (b_1 - b)^2\}^{3/2}}.$$

Wir setzen

$$A' = F(b_1 - b);$$

der Werth von A wird hieraus erhalten, indem wir die Summe über alle Umgänge b_1 und b nehmen. Nun seien auf der Rolle α n Windungen neben einander, auf der Rolle 1 dagegen n_1, indem wir vorläufig n und n_1 verschieden annehmen, wie r und r_1. Dann erhält

b n verschiedene Werthe und b_1 n_1 verschiedene Werthe; die Summe hat also nn_1 Glieder. Eine solche Doppelsumme kann, wenn n und n_1 grosse Zahlen sind, nach einem Eulerschen Satze sehr angenähert durch ein Doppelintegral dargestellt werden, nämlich durch das folgende

$$\frac{nn_1}{(b''-b')(b_1''-b_1')}\int_{b_1'}^{b_1''}\int_{b'}^{b''} F(b_1-b)\,db\,db_1,$$

wo b' und b'' die Grenzwerthe von b, b_1' und b_1'' die Grenzwerthe von b_1 bedeuten. Nennen wir endlich die Dicken der beiden Rollen h und h_1,

$$h = b'' - b', \qquad h_1 = b_1'' - b_1',$$

so wird der Werth des Drehungsmomentes für $\varphi = 0$

$$(6)\qquad N_0 = \frac{4\pi jj_1 nn_1 rr_1 a}{hh_1}\int_{b_1'}^{b_1''}\int_{b'}^{b''}\int_0^{2\pi}\frac{(b_1-b)\cos p\,dp\,db\,db_1}{\{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1-b)^2\}^{3/2}}.$$

Die Integrationen nach b und nach b_1 lassen sich leicht ausführen, und man findet

$$N_0 = \frac{4\pi jj_1 nn_1 rr_1 a}{hh_1}\int_0^{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\log\{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1''-b'')^2}+b_1''-b''\}\\ -\log\{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1''-b')^2}+b_1''-b'\}\\ -\log\{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1'-b'')^2}+b_1'-b''\}\\ +\log\{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1'-b')^2}+b_1'-b'\}\end{array}\right\}\cos p\,dp.$$

Weiter kann durch partielle Integration das erste der Integrale auf die Form gebracht werden

$$-rr_1\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 p\,dp}{\{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1''-b'')^2}+b_1''-b''\}\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1''-b'')^2}},$$

oder, indem wir Zähler und Nenner mit

$$\{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1''-b'')^2}-(b_1''-b'')\}$$

multipliciren, auf die Form

$$-rr_1\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 p\,dp}{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p}+rr_1\int_0^{2\pi}\frac{(b_1''-b'')\sin^2 p\,dp}{(r^2+r_1^2-2rr_1\cos p)\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos p+(b_1''-b'')^2}}.$$

Das erste Glied enthält $(b_1''-b'')$ nicht; formen wir alle vier Integrale in ähnlicher Weise um, so heben sich die ersten Glieder aus dem Werthe N_0 fort, und wir können für die Integrale einfach die zweiten Glieder einsetzen. Diese sind bei beliebigen Werthen r, r_1 elliptische Integrale aller drei Gattungen mit verschiedenen Moduln.

Wir lassen nun die Voraussetzung eintreten, dass die Rollen gleich seien, also

$$r = r_1,$$

ferner auch

$$b_1'' - b_1' = b'' - b' = h .$$

Wir haben dann für das erste Integral einzusetzen

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{(b_1'' - b'')\sin^2 p \, . \, dp}{\sin^2\frac{p}{2}\sqrt{4r^2\sin^2\frac{p}{2} + (b_1'' - b'')^2}}$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \frac{(b_1'' - b'')\cos^2\frac{p}{2} \, . \, dp}{\sqrt{4r^2\sin^2\frac{p}{2} + (b_1'' - b'')^2}}$$

Wir setzen daher

$$p = \pi - 2q , \qquad k_1^2 = \frac{4r^2}{4r^2 + (b_1'' - b'')^2}$$

und erhalten die Form

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(b_1'' - b'')\sin^2 q \cdot dq}{\sqrt{4r^2 + (b_1'' - b'')^2}\sqrt{1 - k_1^2\sin^2 q}}$$

oder

$$4\frac{\sqrt{1-k_1^2}}{k_1^2}(K_1 - E_1),$$

wenn K_1 und E_1 die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul k_1 bezeichnen,

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2 q}}, \qquad E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_1^2\sin^2 q}\, dq .$$

Setzen wir also weiter

$$k_2^2 = \frac{4r^2}{4r^2 + (b_1'' - b')^2} , \qquad k_3^2 = \frac{4r^2}{4r^2 + (b_1' - b'')^2} ,$$

während

$$\frac{4r^2}{4r^2 + (b_1' - b')^2} = \frac{4r^2}{4r^2 + (b_1'' - b'')^2} = k_1^2 ,$$

und haben K_2, E_2 und K_3, E_3 die entsprechende Bedeutung, so folgt schliesslich

$$(8) \quad N_0 = \frac{16\pi j j_1 n^2 r^2 a}{h^2}\left\{2\frac{\sqrt{1-k_1^2}}{k_1^2}(K_1 - E_1) - \frac{\sqrt{1-k_2^2}}{k_2^2}(K_2 - E_2) - \frac{\sqrt{1-k_3^2}}{k_3^2}(K_3 - E_3\right.$$

Wir wollen endlich setzen

$$(9) \quad F = \frac{n^2 r^2}{h^2}\left\{2\frac{\sqrt{1-k_1^2}}{k_1^2}(K_1 - E_1) - \frac{\sqrt{1-k_2^2}}{k_2^2}(K_2 - E_2) - \frac{\sqrt{1-k_3^2}}{k_3^2}(K_3 - E_3)\right\};$$

dann ist F eine Zahl, welche für das Instrument einmal zu berechnen ist. Sie hängt von dem Halbmesser r der Rollen ab, von der Dicke h

der Rollen, von der Anzahl n der Drahtumwindungen, endlich von den Entfernungen der Rollen in der Ruhelage.

Wir haben somit gefunden

$$N_0 = 16\pi j j_1 a F. \tag{10}$$

Die Anwendung des Instrumentes ist nun leicht zu übersehen. Wir nehmen an, φ habe nur sehr kleine Werthe, so dass φ^2 neben 1 zu vernachlässigen sei; dies trifft immer zu, wenn man die Ablenkung mittelst Spiegel und Fernrohr beobachtet. Bedeutet dann G das Gewicht des ganzen aufgehängten Theils, l die Länge der Fäden, o und u ihre Abstände oben und unten, so ist die Bedingung für das Gleichgewicht

$$G\frac{ou}{4l}\sin\varphi = 16\pi j j_1 a F,$$

oder es wird, wenn wir denselben Strom durch alle sechs Rollen gehen lassen,

$$j^2 = \frac{1}{16\pi}\frac{ou}{4la}\frac{1}{F}G\sin\varphi.$$

Folglich wird das Quadrat der Stromstärke gleich einem Gewicht G, multiplicirt mit einer Zahl.

Wegen der langen Leitung ist eine solche Bestimmung nur möglich, wenn eine ziemlich starke elektromotorische Kraft den Strom erzeugt; sonst wird die Stromstärke j so schwach, dass die ihrem Quadrat proportionale Ablenkung φ zu klein ausfällt. Aber wir können dann zuerst einen starken Strom j_1 absolut messen, und nachher den schwächern Strom j mit jenem vergleichen, indem wir den einen Strom durch die vier festen, den andern durch die zwei beweglichen Rollen gehen lassen; wir bestimmen so die Werthe von j_1^2 und von jj_1.

Wir wollen nun auch den Fall besprechen, wo $\sin^2\varphi$ neben 1 nicht kann vernachlässigt werden. Man muss solchen Apparaten die Einrichtung geben, welche die Sinusboussole besitzt; die vier festen Rollen müssen um dieselbe Axe drehbar gemacht werden, um welche der Hebel sich dreht, und es muss der Drehungswinkel messbar sein. Man dreht das System der vier Rollen so lange, bis Gleichgewicht besteht und alle sechs Rollen einander parallel sind; war dies auch der Fall, bevor der Strom durch alle sechs Rollen geleitet wurde, so gilt die frühere Formel, und der Drehungswinkel ist gleich dem Ablenkungswinkel.

Mittelst eines solchen Apparates kann auch der Coefficient des Gliedes mit $\sin^2\varphi$ experimentell bestimmt werden. Bezeichnet φ die Drehung des Hebels gegen das System der vier Rollen, ψ dagegen seine absolute Drehung, so gilt die Gleichung für das Gleichgewicht

$$G\frac{ou}{4l}\sin\psi = (C_0 + C_1\sin^2\varphi)j^2.$$

Lassen wir nun einmal die vier Rollen in Ruhe und beobachten die Ablenkung des Hebels φ_1, so haben wir:

$$G\frac{\partial u}{4l}\sin\varphi_1 = (C_0 + C_1\sin^2\varphi_1)j^2.$$

Drehen wir dann die vier Rollen um den Winkel α, und ist jetzt die Ablenkung φ_2, so gilt die Gleichung:

$$G\frac{\partial u}{4l}\sin(\alpha+\varphi_2) = (C_0 + C_1\sin^2\varphi_2)j^2.$$

Wir können α so wählen, dass $\varphi_2 = 0$ wird; die zweite Gleichung bestimmt dann etwa j^2, wenn C_0 berechnet ist, und die erste Gleichung giebt den Werth von C_1.

Auf diesem Wege kann auch bei denjenigen Instrumenten, wo die Ablesung sehr fein und der Ablenkungswinkel klein ist, experimentell nachgewiesen werden, dass das Glied mit $\sin^2\varphi$ zu vernachlässigen ist. Den Coefficienten zu berechnen möchte kaum möglich sein.

§. 41.

Allgemeine Eigenschaften der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement; Determinanten und Directrix.

Wir kehren nun zu unsern allgemeinen theoretischen Betrachtungen zurück und fassen die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement näher ins Auge.

Wir haben für die Componenten der Wirkung, welche ein geschlossener Strom s_1 auf das Stromelement ds ausübt, die Werthe gefunden (S. 107)

$$X = \frac{1}{2}jj_1\int_{s_1}\frac{\gamma\,dy - \beta\,dz}{r^2}\sin\vartheta_1\,ds_1,$$

u. s. w.

wo über den ganzen geschlossenen Strom s_1 zu integriren ist. Setzen wir nun

$$(1)\qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\int\frac{\alpha\sin\vartheta_1\,ds_1}{r^2}, \\ B = \frac{1}{2}\int\frac{\beta\sin\vartheta_1\,ds_1}{r^2}, \\ C = \frac{1}{2}\int\frac{\gamma\sin\vartheta_1\,ds_1}{r^2}, \end{cases}$$

so können wir die Componenten folgendermaassen ausdrücken:

$$(2)\qquad \begin{cases} X = jj_1(C\,dy - B\,dz), \\ Y = jj_1(A\,dz - C\,dx), \\ Z = jj_1(B\,dx - A\,dy). \end{cases}$$

Wir wollen uns die Natur der Grössen A, B, C noch anschaulicher machen. Wir schreiben A in der Form

$$A = \int \frac{\alpha \cdot \frac{1}{2} r \sin \vartheta_1 ds_1}{r^3};$$

$\frac{1}{2} r \sin \vartheta_1 ds_1$ ist der Inhalt der Elementarfläche, des Dreieckes (ds_1, r), ferner α der Cosinus des Winkels, den die Normale auf die Elementarfläche mit der x-Axe bildet; folglich steht unter dem Integral die Projection der Elementarfläche auf die (y, z)-Ebene, dividirt durch den Cubus der Entfernung r. A ist dem Integral dieses Quotienten gleich, und in B und C haben wir die Projectionen auf die (z, x) und die (x, y)-Ebene. Wir können demnach auch setzen, da

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1), \quad (x, y, z)$$

die Coordinaten von den Ecken der Elementarfläche sind, und die Normale zu den Richtungen ds_1 und r so stehen soll, wie die z-Axe zu den Axen x und y,

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \int \frac{(z - z_1) dy_1 - (y - y_1) dz_1}{r^3}, \\ B = \frac{1}{2} \int \frac{(x - x_1) dz_1 - (z - z_1) dx_1}{r^3}, \\ C = \frac{1}{2} \int \frac{(y - y_1) dx_1 - (x - x_1) dy_1}{r^3}, \end{cases}$$

welche Werthe aus den Gleichungen (II) S. 104 unmittelbar folgen.

Wir nennen die Grössen A, B, C die Determinanten des geschlossenen Stromes s_1 an der Stelle x, y, z; denn die Richtung des Stromelementes ds, d. h. die Werthe dx, dy, dz kommen in A, B, C nicht vor. Denken wir uns ferner auf den drei Axen die Längen A, B, C abgetragen und mit diesen drei Kanten ein rechtwinkliges Parallelepipedum gebildet, so sei die Diagonale desselben D; Ampère nennt diese Grösse die Directrix der elektrodynamischen Wirkung an der Stelle x, y, z. Die Determinanten A, B, C bestimmen die Richtung und Grösse der Directrix; ebenso sind umgekehrt, wenn die Directrix in Bezug auf Richtung und Grösse bekannt ist, die Determinanten gegeben. Es gelten die Formeln

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} D^2 = A^2 + B^2 + C^2, \\ \cos(D, x) = \frac{A}{D}, \quad \cos(D, y) = \frac{B}{D}, \quad \cos(D, z) = \frac{C}{D}, \end{cases}$$

und der Werth von D ist immer positiv.

Aus den obigen Gleichungen folgt nun

$$\text{(4)} \qquad AX + BY + CZ = 0,$$

d. h. die Kraft, welche der geschlossene Strom s_1 auf das Stromelement

ds an der Stelle x, y, z ausübt, steht auf der Directrix des Stromes an dieser Stelle senkrecht. Ferner aber ist, wie wir schon oben gefunden haben,

$$(5) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

d. h. die Kraft steht auch auf dem Stromelement senkrecht. Und zwar ist der Sinn, in welchem die Kraft wirkt, dadurch bestimmt, dass die Kraft zu den Richtungen ds und D so stehen soll, wie die z-Axe zu den Axen x und y.

Endlich lässt sich auch die Grösse der resultirenden Kraft R durch die Directrix D ausdrücken. Wir haben nämlich

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = j^2 j_1^2 \{D^2 ds^2 - (Adx + Bdy + Cdz)^2\}$$
$$= j^2 j_1^2 D^2 ds^2 \{1 - \cos^2 (D, ds)\};$$

folglich wird

$$(6) \qquad R = j j_1 D ds \sin (D, ds);$$

die Kraft ist also am Grösten, wenn das Stromelement auf der Directrix senkrecht steht, dagegen null, wenn diese beiden Richtungen zusammenfallen.

§. 42.

Anwendung auf den Fall unbegrenzt fortdauernder Rotation.

Aus diesen Gleichungen folgt nun der merkwürdige Satz:

Die Componente der Kraft, welche ein geschlossener Strom auf ein Stromelement ds ausübt, nach einer durch das Stromelement gelegten Ebene ist ihrer Grösse nach unabhängig von der Richtung des Elementes ds in dieser Ebene und steht auf dem Element immer senkrecht. Ist also das Element um eine Axe drehbar, welche auf jener Ebene senkrecht steht, so muss es sich mit fortwährend wachsender Geschwindigkeit um die Axe drehen.

Zur Ableitung dieses Satzes legen wir um die Stelle x, y, z eine Kugeloberfläche mit dem Halbmesser 1 und bestimmen durch Punkte auf dieser Kugeloberfläche die verschiedenen Richtungen, welche wir uns von dem Punkt x, y, z aus genommen denken. Und zwar seien a, D, R die Richtungen des Stromelementes ds, der Directrix D, der Kraft R, endlich $\alpha\beta$ die Ebene, welche durch ds gelegt wird. Nennen wir ferner die Winkel $R\alpha\beta$ und βaD μ und ν, so ist

$$\mu + \nu = \frac{\pi}{2},$$

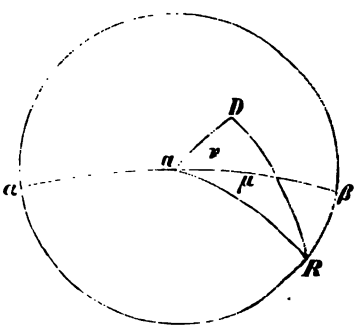


Fig. 47.

da R auf a und D senkrecht steht, und die Componente der Kraft R nach der Ebene $\alpha\beta$ wird

$$R \cos \mu = R \sin \nu .$$

Setzen wir aber den Werth von R ein, so folgt für die Componente der Werth

$$jj_1 D ds \sin (D, ds) \sin \nu ,$$

wo $\sin (D, ds) = \sin (a, D)$. Bezeichnet endlich p den Winkel, welchen die Directrix D mit der Ebene $\alpha\beta$ bildet, so ist

$$\sin (a, D) . \sin \nu = \sin p .$$

Folglich wird die Componente der Kraft nach der Ebene $\alpha\beta$ gleich

$$jj_1 D ds \sin p ,$$

also völlig unabhängig von der Richtung des Elementes ds in der Ebene; sie steht ferner auf dem Element ds immer senkrecht, weil die Kraft R auf ds senkrecht steht, und somit muss, wenn ds um eine Axe drehbar ist, die auf der Ebene $\alpha\beta$ senkrecht steht, eine Drehung mit fortwährend wachsender Geschwindigkeit erfolgen.

Der Satz gilt in aller Strenge, wenn das Element ds der Axe unendlich nahe liegt; es bleibt dann der Ort x, y, z und damit die Directrix des Stromes bei der Drehung ungeändert. Liegt aber ds in endlicher Entfernung von der Drehungsaxe, so ändert sich mit der Lage des Elementes in der Ebene die Directrix, und streng genommen gilt dann der Satz nicht mehr; aber das Resultat wird doch eintreten, wenn die Lage des Elementes gegen den Strom sich nur wenig ändert. Unter derselben Voraussetzung muss dann auch ein endliches Leiterstück in eine solche Rotation versetzt werden, und die Voraussetzung ist jedenfalls erfüllt, wenn die Entfernung des Leiterstückes von dem wirkenden geschlossenen Strom als unendlich gross kann betrachtet werden.

Dies trifft zu, wenn wir die magnetische Kraft der Erde wirken lassen. Wir werden nachweisen, dass jeder Magnet, folglich auch der Erdmagnet durch einen geschlossenen elektrischen Strom oder durch ein System von solchen kann ersetzt werden. Ist also ein Leiterstück, welches von einem Strom durchflossen wird, um eine verticale Axe drehbar, so wird dasselbe durch die Wirkung der erdmagnetischen Kraft in Rotation um die Axe versetzt, und die Winkelgeschwindigkeit nimmt sehr bald einen constanten Werth an, indem die Reibung den Zuwachs gerade aufhebt. Aehnlich kann auch ein Leiterstück in Rotation um einen Magnet versetzt werden; wir kommen auf solche Fälle später zurück.

§. 43.

Ersetzung eines endlichen geschlossenen Stromes durch unendlich viele unendlich kleine Ströme. Determinanten eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes; geometrische Construction für die Richtung seiner Directrix.

Wir wollen zunächst unsre allgemeinen Formeln auf den besondern Fall anwenden, wo der geschlossene Strom s_1 eine sehr kleine Fläche umkreist. Diese Betrachtung hat eine besondere Wichtigkeit, weil jeder endliche geschlossene Strom in unendlich viele unendlich kleine kann zerlegt werden.

Wir behandeln hier nur den Fall, wo der endliche Strom in einer ebenen Curve fliesst. Theilen wir das umströmte Stück der Ebene irgendwie in unendlich viele unendlich kleine Elemente, und denken wir uns jedes dieser Elemente von einem Strom umkreist, in derselben Richtung, in welcher die endliche Fläche von dem gegebenen Strome umkreist wird, und von derselben Stärke, so erkennt man leicht, dass alle diese Ströme zusammen genommen den gegebenen Strom gerade ersetzen. Denn in allen Grenzen zwischen zwei Elementen haben wir zwei gleiche entgegengesetzt gerichtete Ströme, welche sich aufheben. Folglich muss auch die Wirkung des endlichen Stromes der Resultante aus den Wirkungen all der unendlich kleinen Elementarströme gleich sein.

Fig. 15.

Führen wir die Rechnung durch, so treten Doppelintegrale auf statt der einfachen; das ist unter Umständen ein Vortheil, indem das Doppelintegral sehr oft leichter auszuführen ist, als das einfache, oder eine leichter erkennbare Bedeutung hat. So gelangt man z. B. mittelst dieser Umformung am Einfachsten zu dem Ampèreschen Gesetz, dass jeder geschlossene Strom, was seine Wirkung nach Aussen betrifft, durch eine sogenannte magnetische Doppelfläche kann ersetzt werden.

Wir berechnen daher jetzt die Determinanten und die Directrix eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes.

Der Einfachheit wegen sei x, y, z eine Stelle des unendlich kleinen Stromes, und wir berechnen die Determinanten für den Anfangspunkt

der Coordinaten. Wir haben dann

$$(1)\quad A = \frac{1}{2}\int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Betrachten wir also die Projection des Stromes auf die (y, z)-Ebene, nennen wir den Radiusvector u, den Winkel zwischen diesem und der y-Axe φ, so ist

$$y = u\cos\varphi, \quad z = u\sin\varphi,$$
$$r^2 = x^2 + u^2;$$

folglich

$$y\,dz - z\,dy = u^2\,d\varphi.$$

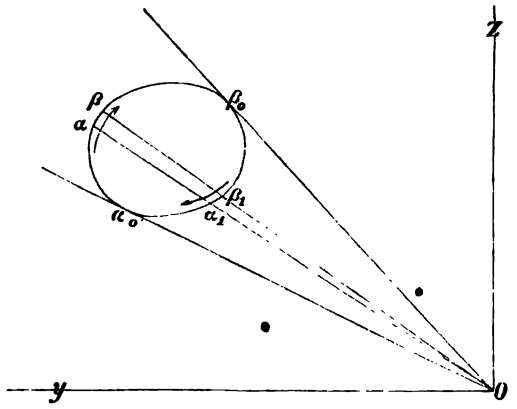


Fig. 49.

Wir haben bei der Integration zu gehen auf der Curve $\alpha_0\alpha\beta\beta_0$ von $\varphi = \varphi_1$ bis $\varphi = \varphi_2$, und dann zurück auf der Curve $\beta_0\beta_1\alpha_1\alpha_0$ von $\varphi = \varphi_2$ bis $\varphi = \varphi_1$. φ_1 und φ_2 bezeichnen die Winkel, für welche der Radiusvector die Stromcurve tangirt*). Nennen wir aber, indem wir die Bezeichnung u für den Radiusvector der Curve $\alpha_0\alpha\beta\beta_0$ beibehalten, den Radiusvector der Curve $\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta_0$ u_1, unterscheiden wir dem entsprechend auch die Werthe r und r_1, so können wir setzen

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\frac{u^2}{r^3} - \frac{u_1^2}{r_1^3}\right)d\varphi,$$

wo nun φ einfach von φ_1 bis φ_2 zunimmt. Setzen wir weiter

$$u_1 = u - \delta u, \qquad r_1 = r - \delta r,$$

so sind, da der Strom unendlich klein ist, die höhern Potenzen von δu und δr zu vernachlässigen, und wir finden

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\frac{2u\,\delta u}{r^3} - \frac{3u^2\delta r}{r^4}\right)d\varphi.$$

Zwischen δu und δr aber besteht eine Beziehung; diese müssen wir aufsuchen. Es bilde die Normale auf die Ebene des unendlich kleinen Stromes mit den Coordinatenaxen die Winkel ξ, η, ζ, und zwar werde die Normale so positiv gerechnet, dass der Strom eine positive Drehung um die Normale ausführe; die positive Drehung aber sei immer da-

*) Damit wird vorausgesetzt, dass ein Radiusvector die Stromcurve nie mehr als zweimal schneide; da die geschlossene Curve unendlich klein gesetzt ist, kann diese Voraussetzung ohne Weiteres gemacht werden. Uebrigens ist sie, wie leicht ersichtlich, für das Resultat der Rechnung ganz unwesentlich.

durch definirt, dass die positive Drehung $\frac{\pi}{2}$ um die x-Axe die positive y-Axe in die Lage der positiven z-Axe überführe. Ferner sei die Länge des Perpendikels vom Anfangspunkt auf die Stromebene gleich p, positiv gerechnet, wenn die eben genannte Richtung mit der positiven Richtung der Normale zusammenfällt. Dann ist die Gleichung der Stromebene

$$x \cos \xi + y \cos \eta + z \cos \zeta = p .$$

Sind also $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$ die Coordinaten der oben durch $u - \delta u$; φ, $r - \delta r$ bestimmten Stelle, so folgt

$$\delta x \cos \xi + \delta y \cos \eta + \delta z \cos \zeta = 0 .$$

Ferner ist:

$$u \delta u = y \delta y + z \delta z ,$$

$$r \delta r = x \delta x + u \delta u ;$$

endlich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{z} = \frac{y - \delta y}{z - \delta z} ;$$

folglich

$$z \delta y - y \delta z = 0 .$$

Demnach wird:

$$\delta y = \frac{y}{u} \delta u , \quad \delta z = \frac{z}{u} \delta u ,$$

$$\delta x = - \frac{y \cos \eta + z \cos \zeta}{u \cos \xi} \delta u ,$$

also

$$r \delta r = u \delta u - \frac{y \cos \eta + z \cos \zeta}{u \cos \xi} x \delta u = \frac{r^2 \delta u}{u} - \frac{p x \delta u}{u \cos \xi} .$$

Folglich finden wir

$$A = - \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \frac{u}{r^3} - \frac{3 p x u}{r^5 \cos \xi} \right\} \delta u \, d\varphi$$

$$= - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3 p x}{r^5 \cos \xi} \right) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u \, \delta u \, d\varphi .$$

Nun ist aber das Integral

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u \, \delta u \, d\varphi$$

gleich der Projection der vom Strom umkreisten Fläche auf die $(y z)$-Ebene; denn in der Figur 49 ist $\alpha \alpha_1$ gleich δu und der Flächeninhalt von $\alpha \beta \beta_1 \alpha_1$ gleich $\delta u . u d\varphi$. Nennen wir also λ die Fläche des geschlossenen unendlich kleinen Stromes, so wird

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} u \, \delta u \, d\varphi = \lambda \cos \xi$$

und demnach

(2) $$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\xi}{r^3} - \frac{3px}{r^5}\right)\lambda .$$

Wir wollen nun nach Ausführung dieser Rechnung zu der früher gebrauchten Bezeichnung zurückkehren.

Der unendlich kleine geschlossene Strom befinde sich an der Stelle x_1, y_1, z_1; die von diesem Strom umkreiste Fläche sei λ_1, und die positive Normale bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel ξ_1, η_1, ζ_1. Es sollen die Determinanten dieses Stromes bestimmt werden an der Stelle x, y, z. Dann treten an die Stelle von x, y, z in den oben gefundenen Formeln die Ausdrücke $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, und an die Stelle von p das Perpendikel, welches von der Stelle x, y, z auf die Stromebene gefällt wird. Dieser Werth p ist an Grösse gleich der Projection der Entfernung r auf die Normale der Stromebene, hat aber entgegengesetztes Vorzeichen, wenn wir auch hier die Richtung r von der Stelle, welche die Wirkung ausübt, nach der andern Stelle nehmen, wo die Wirkung ausgeübt wird. Folglich ist, wenn

$$p_1 = (x - x_1)\cos\xi_1 + (y - y_1)\cos\eta_1 + (z - z_1)\cos\zeta_1 ,$$

$-p_1$ an die Stelle von p zu setzen. Demnach sind die Determinanten

(VIII)
$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\xi_1}{r^3} - \frac{3p_1(x-x_1)}{r^5}\right)\lambda_1 , \\ B = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\eta_1}{r^3} - \frac{3p_1(y-y_1)}{r^5}\right)\lambda_1 , \\ C = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\zeta_1}{r^3} - \frac{3p_1(z-z_1)}{r^5}\right)\lambda_1 . \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich eine einfache Construction für die Richtung der Directrix.

Wir betrachten die Ebene, welche die Stellen M_1 (x_1, y_1, z_1), M (x, y, z) und die Normale n_1 (ξ_1, η_1, ζ_1) enthält. Wir theilen $M_1 M$ in drei gleiche Theile und nehmen

$$\overline{M_1 P} = \frac{1}{3}\overline{M_1 M} ;$$

ferner legen wir durch P die Senkrechte auf $M_1 M$; sie schneide die Normale $M_1 n_1$ in Q. Dann ist QM die Richtung der Directrix.

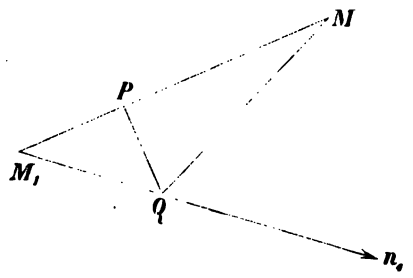


Fig. 50.

Denn die Coordinaten von M in Bezug auf M_1 sind

$$x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1 ;$$

also sind die Coordinaten von P in Bezug auf M_1

$$\frac{1}{3}(x - x_1),\quad \frac{1}{3}(y - y_1),\quad \frac{1}{3}(z - z_1);$$

dagegen werden die von Q in Bezug auf M_1

$$\frac{1}{3} r \frac{r}{p_1} \cos \xi, \qquad \frac{1}{3} r \frac{r}{p_1} \cos \eta, \qquad \frac{1}{3} r \frac{r}{p_1} \cos \zeta,$$

indem $\cos (\bar{P}\bar{M}_1\, Q) = \frac{p_1}{r}$. Folglich sind die Coordinaten von M in Bezug auf Q

$$x - x_1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{p_1} \cos \xi, \quad \text{u. s. f.,}$$

d. h. proportional den Grössen A, B, C.

§. 44.

Dieselbe Construction giebt die Richtung der Kraft, welche ein magnetisches Molecül auf eine magnetische Masse ausübt.

Merkwürdiger Weise erhalten wir durch dieselbe Construction die Richtung der Kraft, welche ein magnetisches Molecül mit der Axe n_1 an der Stelle x_1, y_1, z_1 auf eine magnetische Masse an der Stelle x, y, z ausübt.

Das magnetische Molecül bestehe aus den magnetischen Massen $+\mu_1$ an der Stelle (x_1, y_1, z_1) und $-\mu_1$ an der Stelle $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1)$, wo

$$\delta x_1 = -\cos \xi_1 \,.\, \delta n_1, \quad \delta y_1 = -\cos \eta_1 \,.\, \delta n_1, \quad \delta z_1 = -\cos \zeta_1 \,.\, \delta n_1.$$

Die Richtung von $-\mu_1$ nach $+\mu_1$, die Axe des magnetischen Molecüls, fällt dann zusammen mit der Richtung n_1, sobald wir δn_1 einen positiven Werth geben. An der Stelle (x, y, z) befinde sich ferner die magnetische Masse μ. Dann hat die von der Masse μ_1 auf die Masse μ ausgeübte Kraft die Componenten

$$\frac{\mu\mu_1}{r^2} \frac{x - x_1}{r}, \quad \frac{\mu\mu_1}{r^2} \frac{y - y_1}{r}, \quad \frac{\mu\mu_1}{r^2} \frac{z - z_1}{r^2};$$

hieraus folgen die Componenten der Kraft, welche die Masse $-\mu_1$ auf μ ausübt, indem wir statt x_1, y_1, z_1, r

$$x_1 + \delta x_1, \quad y_1 + \delta y_1, \quad z_1 + \delta z_1, \quad r + \delta r$$

setzen und das Vorzeichen umkehren. Nehmen wir die Summen, so erhalten wir als Componenten der Kraft, welche das magnetische Molecül auf die magnetische Masse ausübt,

$$\frac{\mu\mu_1}{r^3} \left\{ \delta x_1 + 3 \frac{(x - x_1)}{r} \delta r \right\}, \quad \text{u. s. w.,}$$

wo $\delta r = -\{(x - x_1)\,\delta x_1 + (y - y_1)\,\delta y_1 + (z - z_1)\,\delta z_1\}$,

oder, wenn wir die Werthe für δx_1, δy_1, δz_1 einsetzen,

$$-\frac{\mu\mu_1 \delta n_1}{r^3} \left\{ \cos \xi_1 - \frac{3 p_1 (x - x_1)}{r^2} \right\}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die drei Componenten sind also den Werthen der Determinanten A, B, C proportional, und demnach fällt die Resultante zusammen mit der Directrix.

§. 45.

Darstellung der Determinanten als Differentialquotienten einer Function.

Aus dieser Analogie ziehen wir den Schluss, dass die Determinanten des unendlich kleinen geschlossenen Stromes in Bezug auf die Stelle (x, y, z) als die Differentialquotienten einer Function von (x, y, z) nach diesen drei Variabeln darstellbar seien; denn es gilt das für die Componenten der magnetischen Wirkung; diese sind den Differentialquotienten eines Potentials entgegengesetzt gleich.

Nun ist auch

$$\frac{\cos\xi_1}{r^3} - 3\frac{x-x_1}{r^5}\{(x-x_1)\cos\xi_1 + (y-y_1)\cos\eta_1 + (z-z_1)\cos\zeta_1\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(x-x_1)\cos\xi_1 + (y-y_1)\cos\eta_1 + (z-z_1)\cos\zeta_1}{r^3}\right\}, \quad \text{u. s. w.}$$

und wir finden

$$\text{(IX, a)} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial \frac{p_1}{r^3}}{\partial x}, \\ B = -\frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial \frac{p_1}{r^3}}{\partial y}, \\ C = -\frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial \frac{p_1}{r^3}}{\partial z}. \end{cases}$$

Endlich muss noch die Grösse unter den Differentialquotienten als ein Differentialquotient nach der Normale n_1 des unendlich kleinen Stromes darstellbar sein. Denn es ist das Potential des magnetischen Molecüls auf die magnetische Masse dem Ausdruck proportional

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1}.$$

Wir haben auch, wenn r die Richtung von dem Orte (x_1, y_1, z_1) nach dem Orte (x, y, z) bezeichnet, woran wir immer festhalten,

$$\frac{p_1}{r} = -\frac{\partial r}{\partial n_1},$$

indem

$$\frac{\partial x_1}{\partial n_1} = \cos\xi_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial n_1} = \cos\eta_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial n_1} = \cos\zeta_1,$$

also

$$p_1 = (x-x_1)\frac{\partial x_1}{\partial n_1} + (y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial n_1} + (z-z_1)\frac{\partial z_1}{\partial n_1} = -r\frac{\partial r}{\partial n_1}.$$

Folglich können wir die Determinanten des unendlich kleinen Stromes in der Form darstellen:

(IX, b)
$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2}\lambda_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \\ B = -\frac{1}{2}\lambda_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \\ C = -\frac{1}{2}\lambda_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \end{cases}$$

oder auch, da die beiden Differentiationen von einander unabhängig sind, in der Form

(IX, c)
$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}\lambda_1 \dfrac{\partial \frac{x-x_1}{r^3}}{\partial n_1}, \\ B = \frac{1}{2}\lambda_1 \dfrac{\partial \frac{y-y_1}{r^3}}{\partial n_1}, \\ C = \frac{1}{2}\lambda_1 \dfrac{\partial \frac{z-z_1}{r^3}}{\partial n_1}. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir die Componenten der Wirkung, welche der unendlich kleine geschlossene Strom λ_1 auf das Stromelement ds ausübt, in einer viel einfachern Form; wir wollen diese Componenten nun mit $X_{\lambda_1, ds}$, $Y_{\lambda_1, ds}$, $Z_{\lambda_1, ds}$ bezeichnen und finden, da

$$X_{\lambda_1, ds} = jj_1 (C dy - B dz), \quad \text{u. s. w.}$$

(X)
$$\begin{cases} X_{\lambda_1, ds} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda_1 \dfrac{\partial}{\partial n_1} \left\{ \dfrac{(z-z_1)\,dy - (y-y_1)\,dz}{r^3} \right\}, \\ Y_{\lambda_1, ds} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda_1 \dfrac{\partial}{\partial n_1} \left\{ \dfrac{(x-x_1)\,dz - (z-z_1)\,dx}{r^3} \right\}, \\ Z_{\lambda_1, ds} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda_1 \dfrac{\partial}{\partial n_1} \left\{ \dfrac{(y-y_1)\,dx - (x-x_1)\,dy}{r^3} \right\}. \end{cases}$$

§. 46.

Componenten der Wirkung, welche ein unendlich kleiner geschlossener Strom auf einen andern unendlich kleinen geschlossenen Strom ausübt.

Diese einfachen Formeln setzen uns in den Stand, schliesslich auch noch die Wirkung zu bestimmen, welche ein unendlich kleiner geschlossener Strom auf einen andern unendlich kleinen geschlossenen Strom ausübt.

Es sei ds das Element eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes, welcher die Fläche λ umkreist; wir erhalten dann durch Inte-

gration über diesen geschlossenen Leiter s die Componente der Kraft, welche der Strom λ_1 auf den Strom λ ausübt,

$$X_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} j j_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial n_1} \int \frac{(z-z_1)\,dy - (y-y_1)\,dz}{r^3}.$$

Nun haben wir aber oben gefunden, dass

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{(z-z_1)\,dy_1 - (y-y_1)\,dz_1}{r^3} = \frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial \frac{x-x_1}{r^3}}{\partial n_1};$$

folglich muss auch sein

$$\int \frac{(z_1-z)\,dy - (y_1-y)\,dz}{r^3} = \lambda \frac{\partial \frac{x_1-x}{r^3}}{\partial n},$$

wenn n die Normale auf die Ebene des Stromes λ bezeichnet. Mithin ergiebt sich

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} X_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} j j_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{x-x_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1}, \\ Y_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} j j_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{y-y_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1}, \\ Z_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} j j_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{z-z_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke, welche unter den doppelten Differentialquotienten stehen, können noch als Differentialquotienten nach x, y, z oder nach x_1, y_1, z_1 dargestellt werden; wir haben

$$\frac{x-x_1}{r^3} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}, \quad \text{u. s. w.}$$

Setzen wir

$$\text{(XII)} \qquad V_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} j j_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial n_1},$$

so wird

$$X_{\lambda_1,\lambda} = -\frac{\partial V_{\lambda_1,\lambda}}{\partial x}, \qquad Y_{\lambda_1,\lambda} = -\frac{\partial V_{\lambda_1,\lambda}}{\partial y}, \qquad Z_{\lambda_1,\lambda} = -\frac{\partial V_{\lambda_1,\lambda}}{\partial z}.$$

Dass das Potential $V_{\lambda_1,\lambda}$ des einen unendlich kleinen geschlossenen Stromes auf den andern dem Potential eines magnetischen Molecüles auf ein anderes magnetisches Molecül ganz analog ist, geht aus dem oben Gefundenen mit Nothwendigkeit hervor; wir wollen aber hier diese Analogie noch nicht weiter verfolgen.

§. 47.

Neuer Ausdruck für die Wirkung eines endlichen geschlossenen Stromes auf ein Stromelement.

Vielmehr wollen wir die eben gefundenen Formeln zur Anwendung bringen, um die Wirkung eines endlichen geschlossenen Stromes zuerst auf ein Stromelement und dann auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom zu berechnen. Wir beschränken uns aber auf die Betrachtung des einfachen Falles, wo alle Stromcurven in einer Ebene liegen.

Der endliche geschlossene Strom s_1 liege in der (x, y)-Ebene; wir lassen ferner die z-Axe mit seiner positiven Normale zusammenfallen. Das Stromelement ds, auf welches die Wirkung ausgeübt werde, liege ebenfalls in der (x, y)-Ebene, zunächst ausserhalb des geschlossenen Stromes. Es ist dann

$$z_1 = 0, \quad dz_1 = 0, \quad z = 0, \quad dz = 0.$$

Theilen wir ferner das vom Strom umflossene Stück der Ebene in unendlich viele unendlich kleine Elemente, und ist eines dieser Elemente $d\omega_1$ an der Stelle x_1, y_1, so haben wir an der Stelle x_1, y_1 den Elementarstrom $d\omega_1$; für denselben ist

$$\cos\xi_1 = 0, \quad \cos\eta_1 = 0, \quad \cos\zeta_1 = 1, \quad p_1 = 0.$$

Demnach werden die Determinanten desselben an der Stelle (x, y)

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{2}\frac{d\omega_1}{r^3},$$

wo

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$

und die Componenten der Wirkung

$$X' = -\frac{1}{2} j j_1 \, d\omega_1 \frac{dy}{r^3},$$

$$Y' = +\frac{1}{2} j j_1 \, d\omega_1 \frac{dx}{r^3},$$

$$Z' = 0.$$

Folglich steht die Kraft in der (x,y)-Ebene senkrecht auf dem Stromelement, und zwar liegt die positive Richtung der Kraft zu der Richtung des Stromes in ds ebenso, wie die positive Richtung y zu der positiven Richtung x. An Grösse aber ist die Kraft gleich

$$R' = \frac{1}{2} j j_1 \, d\omega_1 \frac{ds}{r^3}.$$

Da alle Elementarwirkungen hienach in dieselbe Richtung fallen, erhalten wir durch Integration über all die Elemente $d\omega_1$ die Kraft, welche der endliche geschlossene Strom auf das Stromelement ausübt,

$$R = \frac{1}{2} j j_1 \, ds \int \frac{d\omega_1}{r^3}.$$

Durch Einführung von Polarcoordinaten mit dem Anfangspunkt $(x,$

und Ausführung einer Integration wird das Doppelintegral auf ein einfaches reducirt. Der Radiusvector r bilde mit der x-Axe den Winkel φ; dann ist

$$d\omega_1 = r\,dr\,d\varphi,$$

und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Integrationsgrenzen. Hiebei machen wir die Annahme, jeder Radiusvector φ schneide die Stromcurve höchstens zweimal in den Abständen r_1 und r_2 von der Stelle (x, y); dann sind r_1 und r_2 gegebene Functionen von φ, und wir haben zuerst in Bezug auf r von r_1 bis r_2, dann in Bezug auf φ von φ_1 bis φ_2 zu integriren, wo φ_1 und φ_2 die Richtungen bedeuten, in welchen der Radiusvector die Stromcurve berührt*). Wir erhalten so

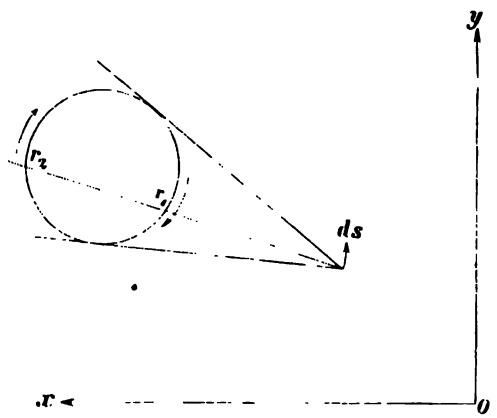


Fig. 51.

$$R = \tfrac{1}{2}\, jj_1\, ds \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr\,d\varphi}{r^2},$$

und wenn wir die Integration in Bezug auf r ausführen,

$$R = \tfrac{1}{2}\, jj_1\, ds \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) d\varphi.$$

Um die letzte Integration auszuführen, muss die Strombahn gegeben sein.

Der Werth von R folgt direct aus den früher aufgestellten Formeln. Wir hatten für die Determinanten eines endlichen geschlossenen Stromes

$$A = \tfrac{1}{2} \int \frac{(z - z_1)\,dy_1 - (y - y_1)\,dz_1}{r^3},$$

$$B = \tfrac{1}{2} \int \frac{(x - x_1)\,dz_1 - (z - z_1)\,dx_1}{r^3},$$

$$C = \tfrac{1}{2} \int \frac{(y - y_1)\,dx_1 - (x - x_1)\,dy_1}{r^3};$$

in dem vorliegenden Falle aber ist zu setzen

*) Dass die Umformung auch dann gilt, wenn die Stromcurve vier, sechs u. s. w. Mal von einem Radiusvector geschnitten wird, ist leicht nachzuweisen. Man kann immer den gegebenen Strom in eine endliche Anzahl von geschlossenen Strömen zerlegen, so dass für jeden dieser letztern die Annahme erfüllt ist; nimmt man schliesslich die Summe, so bleibt nur das Integral über den gegebenen Strom.

$$x - x_1 = -r\cos\varphi, \quad y - y_1 = -r\sin\varphi, \quad z - z_1 = 0,$$
$$dx_1 = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy_1 = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi, \quad dz_1 = 0;$$

folglich wird

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{2}\int \frac{r^2\, d\varphi}{r'},$$

und das Integral ist über den ganzen geschlossenen Strom zu nehmen. Benutzen wir also die oben eingeführte Bezeichnung, so wird

$$C = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) d\varphi.$$

Daraus folgt der oben gefundene Werth für R.

Wir wollen als Beispiel den Fall berechnen, wo die Stromcurve ein Kreis ist von dem Halbmesser R_1. Die Stelle (x, y) liege in der Entfernung E vom Mittelpunkt des Kreises, und wir lassen die x-Axe mit der Richtung nach diesem Mittelpunkt zusammenfallen. Wir haben dann

$$r_1 = E\cos\varphi - \sqrt{R_1^2 - E^2\sin^2\varphi},$$
$$r_2 = E\cos\varphi + \sqrt{R_1^2 - E^2\sin^2\varphi};$$

folglich

$$R = \frac{jj_1\, ds}{E^2 - R_1^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{R_1^2 - E^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Nun ist aber

$$\varphi_2 = -\varphi_1 = \arccos\left(\sin = \frac{R_1}{E}\right)$$

Setzen wir also

$$\sin\varphi = \frac{R_1}{E}\sin\vartheta, \quad k = \frac{R_1}{E},$$

so wird

$$R = \frac{2jj_1\, ds}{E(1-k^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta} - \sqrt{1 - \frac{1-k^2}{k^2\sin^2\vartheta}}\right\} d\vartheta.$$

Die Wirkung ist bestimmt durch die vollständigen elliptischen Integrale der ersten und der zweiten Gattung.

Wir wollen nun auch den Fall behandeln, wo das Element ds innerhalb des geschlossenen Stromes s_1 liegt. In diesem Fall ist die untere Grenze $r_1 = 0$, und der Werth der resultirenden Kraft wird unendlich, wenn wir die obige Formel zur Anwendung bringen. Allein diese Anwendung wäre ganz ungehörig; denn wir haben bei Ableitung der Formel angenommen, die Dimensionen der Elementarströme seien gegen die Entfernung r unendlich klein.

Um unsre Formeln auch in diesem Falle zur Anwendung zu bringen, schliessen wir das Element ds durch einen Kreis aus, dessen Halb-

messer ϱ zwar sehr klein sei, aber doch unendlich gross gegen die Dimensionen der Elementarströme; in dem Kreise fliesse ein Strom derselben Stärke, aber entgegengesetzter Richtung, wie in s_1. Dann gelten unsre Formeln für alle Elementarströme zwischen dem Kreise ϱ und der Curve s_1, und wir finden so die Wirkung des Stromes j_1 in der Curve s_1 und eines Stromes von gleicher Stärke, aber von entgegengesetzter Richtung in dem Kreise ϱ. Wir müssen also, um die Wirkung des Stromes j_1 in der Curve s_1 zu erhalten, noch die Wirkung hinzu addiren, welche ein Strom ausübt, der in derselben Richtung durch den Kreis fliesst. Die Componenten dieser letztern Wirkung seien Q_x und Q_y. Dann werden die Componenten der Wirkung, welche der geschlossene Strom s_1 auf das Stromelement ds ausübt,

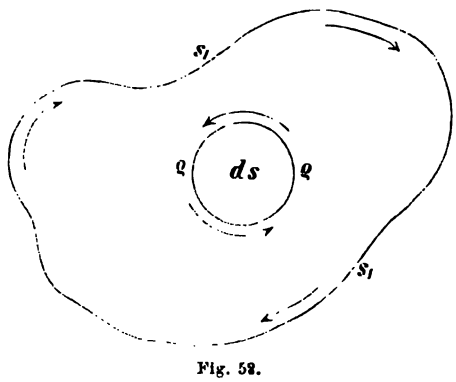


Fig. 52.

$$X = -\frac{1}{2} j j_1 dy \int \frac{d\omega_1}{r^3} + Q_x = -\frac{1}{2} j j_1 dy \int \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) d\varphi + Q_x,$$

$$Y = \frac{1}{2} j j_1 dx \int \frac{d\omega_1}{r^3} + Q_y = \frac{1}{2} j j_1 dx \int \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) d\varphi + Q_y,$$

wo r die Entfernung des Elementes ds von einer Stelle des Stromes s_1 bezeichnet, und wo die Integrale in Bezug auf φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ zu nehmen sind, jetzt unter der wieder nicht wesentlichen Voraussetzung, dass eine von ds aus gezogene Gerade die Stromcurve s_1 nur einmal schneide*).

Um die Werthe von Q_x und Q_y zu berechnen, gehen wir auf den ursprünglichen Ausdruck für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander zurück:

$$j j_1 ds \frac{\sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos\eta - \frac{1}{2}\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r^2} ds_1.$$

In unserm Falle ist

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \beta - \varphi, \quad \eta = 0, \quad r = \varrho, \quad ds_1 = \varrho d\varphi,$$

wenn β den Winkel bezeichnet, den das Stromelement mit der x-Axe bildet; die Richtung der Wirkung ist die des Radiusvectors ϱ; folglich wird

*) Siehe die Anmerkung S. 133.

$$Q_x = \frac{jj_1 ds}{\varrho} \int_0^{2\pi} \sin(\beta - \varphi) \cos\varphi \, d\varphi,$$

$$Q_y = \frac{jj_1 ds}{\varrho} \int_0^{2\pi} \sin(\beta - \varphi) \sin\varphi \, d\varphi,$$

oder

$$Q_x = jj_1 \, ds \sin\beta \frac{\pi}{\varrho} = \frac{1}{2} jj_1 \, dy \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho},$$

$$Q_y = -jj_1 \, ds \cos\beta \frac{\pi}{\varrho} = -\frac{1}{2} jj_1 \, dx \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho}.$$

Somit heben sich aus den Werthen X und Y die Glieder, welche von der untern Grenze ϱ herrühren, gerade weg, und wir finden

$$X = \frac{1}{2} jj_1 dy \int \frac{d\varphi}{r},$$

$$Y = -\frac{1}{2} jj_1 dx \int \frac{d\varphi}{r}.$$

Es gilt also der folgende Satz, mag das Stromelement ausserhalb oder innerhalb des geschlossenen Stromes liegen:

Ein ebener geschlossener Strom s_1 übt auf ein Stromelement ds eine Wirkung $R_{s_1, ds}$ aus, deren Richtung auf dem Element senkrecht steht, und deren Grösse durch das Integral bestimmt wird

$$R_{s_1, ds} = -\frac{1}{2} jj_1 \, ds \int \frac{d\varphi}{r};$$

das Integral ist über die ganze Stromcurve zu nehmen in der Richtung der positiven Strömung, und die Kraft ist in derjenigen Richtung positiv gerechnet, in welche das Stromelement ds durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Sinne des Stromes j_1 übergeführt wird.

§. 48.

Wirkung eines endlichen geschlossenen Stromes auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom.

Wir wollen nun auch die Formeln (XI), S. 131, welche die Wirkung zwischen zwei unendlich kleinen geschlossenen Strömen geben, zur Berechnung der Wirkung benutzen, die ein endlicher geschlossener Strom s_1 auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom λ ausübt; die beiden Ströme sollen wieder in derselben Ebene liegen. Wir erhalten dann durch nochmalige doppelte Integration die Wirkung eines endlichen geschlossenen Stromes auf einen andern.

Wir hatten:

$$X_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{x-x_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1},$$

$$Y_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{y-y_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1},$$

$$Z_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{z-z_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1}.$$

Im vorliegenden Falle ist aber

$$n = z, \qquad n_1 = z_1,$$

und nach Ausführung der Differentiation haben wir z und z_1 null zu setzen. Wir finden so

$$X_{\lambda_1,\lambda} = -\frac{3}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{x_1-x}{r^5},$$

$$Y_{\lambda_1,\lambda} = -\frac{3}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{y_1-y}{r^5},$$

$$Z_{\lambda_1,\lambda} = 0,$$

und es folgt daraus für die Kraft, welche der unendlich kleine geschlossene Strom λ_1 auf den andern λ ausübt, der Werth

$$R_{\lambda_1,\lambda} = \frac{3}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{1}{r^4}.$$

Diese Kraft hat die Richtung von λ_1 nach λ, so dass die Ströme λ und λ_1 sich abstossen umgekehrt proportional der vierten Potenz der Entfernung.

Nun wirke ein endlicher geschlossener Strom s_1. Wir zerlegen die vom Strom umflossene Fläche in Elemente, so dass

$$\lambda_1 = r\, dr\, d\varphi,$$

$$x_1 - x = r\cos\varphi, \qquad y_1 - y = r\sin\varphi,$$

und erhalten für die Componenten der Wirkung

$$X = -\frac{3}{2} jj_1 \lambda \int\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, dr}{r^3},$$

$$Y = -\frac{3}{2} jj_1 \lambda \int\int \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, dr}{r^3};$$

folglich, wenn wir wieder die Grenzen mit r_1 und r_2 bezeichnen,

$$X = \frac{3}{4} jj_1 \lambda \int \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$Y = \frac{3}{4} jj_1 \lambda \int \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \sin\varphi\, d\varphi.$$

Die weitere Integration lässt sich nur ausführen, wenn die Stromcurve gegeben ist.

Liegt der unendlich kleine geschlossene Strom λ innerhalb des endlichen geschlossenen Stromes s_1, so dürfen wir diese Gleichungen

nicht unmittelbar zur Anwendung bringen. Wir beschreiben wieder einen kleinen Kreis von dem Halbmesser ϱ um die Stelle λ und zerlegen zunächst die Ebene zwischen dem Kreise ϱ und der Stromcurve s_1 in Elemente; die untere Grenze von r ist dann $r_1 = \varrho$. Nun ist aber

$$\int \cos\varphi \, d\varphi = 0, \qquad \int \sin\varphi \, d\varphi = 0,$$

weil die Integrale von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ zu nehmen sind. Ferner sieht man sofort ein, dass ein Kreisstrom auf einen in seinem Mittelpunkt gelegenen unendlich kleinen Strom keine Wirkung ausübt. Folglich finden wir allgemein

$$X = \tfrac{3}{4} jj_1 \lambda \int \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{r^2},$$

$$Y = \tfrac{3}{4} jj_1 \lambda \int \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{r^2}$$

für die Componenten der Wirkung, welche ein ebener geschlossener Strom auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom in derselben Ebene ausübt. Die Integrale sind im Sinne der positiven Strömung über die ganze Stromcurve zu nehmen, und r bezeichnet den Abstand der Stelle λ von einer Stelle des wirkenden Stromes.

§. 49.

Wirkung eines Solenoids auf ein Stromelement.

Wir machen noch eine weitere Anwendung der Formeln (IX) (S. 129 u. 130) für die Wirkung eines unendlich kleinen Stromes auf ein Stromelement, vielleicht die wichtigste; denn sie führt uns unmittelbar zu Ampères Vorstellung über das Verhältniss des Magnetismus zur Elektricität.

Ampère versteht unter einem Solenoid ein System von unendlich kleinen gleichen Strömen, deren Ebenen auf einer beliebig gegebenen Curve senkrecht stehen, der sogenannten Leitcurve oder der Axe des Solenoids, und zwar sollen die Ströme in gleichen unendlich kleinen Abständen stätig auf einander folgen, wenn wir auf der Leitcurve fortschreiten. Somit können wir uns das Solenoid als eine Spirale von unendlich nahen Windungen denken, welche auf einer die Leitcurve umgebenden Röhrenfläche constanten Querschnitts fortläuft und von einem Strome durchflossen ist, oder wir können uns auch die Röhrenfläche durch Querschnitte in unendlich kleine Ringe zerlegt und diese von gleichen Strömen durchflossen denken. Die beiden Enden der Axe heissen die Pole des Solenoides, welches begrenzt ist, oder einerseits unbegrenzt, je nachdem die beiden Pole im Endlichen liegen, oder der eine im Unendlichen. Es muss ferner die eine Richtung in der Leitcurve als die positive definirt werden; dies sei diejenige, welche nach links führt, wenn wir uns in dem Strome

schwimmend denken, das Gesicht nach der Axe gekehrt, und der Nordpol soll auf der positiven, der Südpol auf der negativen Seite liegen.

Wir suchen zunächst die Determinanten eines Solenoides an der Stelle (x, y, z). Es bezeichne jetzt s_1 den Bogen der Leitcurve, also $-ds_1$ die Richtung der Normale an den einen der unendlich kleinen Ströme, der an der Stelle s_1 liegt. Ist dann λ_1 die vom Strom umflossene Fläche, so sind die Determinanten des unendlich kleinen Stromes an der Stelle (x, y, z) [Gl. (IX, c) S. 130]

$$A' = -\frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{x-x_1}{r^3},$$

$$B' = -\frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{y-y_1}{r^3},$$

$$C' = -\frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{z-z_1}{r^3}.$$

Nun enthalte die Längeneinheit der Solenoidaxe die Anzahl α_1 unendlich kleiner Ströme; dann kommen auf das Element ds_1 $\alpha_1 ds_1$ solcher Ströme; wir erhalten daher die Determinanten des Solenoides an der Stelle (x, y, z), indem wir die Werthe von A', B', C' mit $\alpha_1 ds_1$ multipliciren und in Bezug auf ds_1 vom Südpol zum Nordpol integriren; α_1 und λ_1 sind nach der Annahme constant. Folglich werden die Determinanten

$$A = -\frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1\left(\frac{x-x_1}{r_1^3} - \frac{x-x_{11}}{r_{11}^3}\right),$$

$$B = -\frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1\left(\frac{y-y_1}{r_1^3} - \frac{y-y_{11}}{r_{11}^3}\right),$$

$$C = -\frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1\left(\frac{z-z_1}{r_1^3} - \frac{z-z_{11}}{r_{11}^3}\right),$$

wo jetzt x_1, y_1, z_1, r_1 auf den Nordpol, x_{11}, y_{11}, z_{11}, r_{11} auf den Südpol des Solenoides sich beziehen.

Demnach sind die Determinanten des Solenoides ganz unabhängig von der Form der Axe und allein abhängig von der Lage ihrer Endpunkte, der Solenoidpole.

Wir nehmen gleich an, das Solenoid sei unbegrenzt; es habe einen Pol im Punkte x_1, y_1, z_1; der andere liege im Unendlichen; dann sind die Determinanten

(XIII)
$$\begin{cases} A = \mp\frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1\frac{x-x_1}{r^3}, \\ B = \mp\frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1\frac{y-y_1}{r^3}, \\ C = \mp\frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1\frac{z-z_1}{r^3}, \end{cases}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der betreffende Pol ein Südpol oder ein Nordpol ist; die Entfernung dieses Poles von der Stelle (x, y, z) ist nun einfach mit r bezeichnet.

Die Directrix wird in diesem Falle

$$D = \frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1\frac{1}{r^2},$$

und ihre Richtung fällt in die Verbindungslinie r; die Grösse der wirkenden Kraft ist

$$R = jj_1 D\sin(D, ds),$$

also

$$R = \frac{1}{2}jj_1\alpha_1\lambda_1\frac{\sin(D, ds)}{r^2}ds,$$

und sie wirkt senkrecht auf die Ebene, welche durch den Pol und das Stromelement gelegt wird.

§. 50.

Ersetzung eines Magnets durch ein Solenoid. Ampères Theorie des Magnetismus.

Folglich ist die Wirkung eines Solenoidpoles der eines Magnetpoles ganz analog; nach dem Biot-Savartschen Gesetz (S. 17) übt die magnetische Masse μ an der Stelle (x_1, y_1, z_1) auf das Stromelement ds die Kraft

$$j\mu\frac{\sin(r, ds)}{r^2}ds$$

aus, senkrecht auf die Ebene, welche durch die Stelle (x_1, y_1, z_1) und das Stromelement bestimmt wird. Die Kräfte sind also an Grösse gleich, wenn wir setzen

$$\mu = \frac{1}{2}\alpha_1\lambda_1 j_1,$$

und die Richtungslinien fallen zusammen. Was endlich den Sinn betrifft, in welchem die Kräfte wirken, gilt Folgendes:

Die Richtung der Kraft, welche der Solenoidpol auf das Stromelement ausübt, wird eindeutig bestimmt durch ihre Componenten

$$X = jj_1(Cdy - Bdz),$$

u. s. w.;

wir haben somit, wenn der Pol ein Nordpol ist,

$$X = -\frac{1}{2}j\alpha_1\lambda_1 j_1\frac{(z-z_1)dy-(y-y_1)dz}{r^3},$$

$$Y = -\frac{1}{2}j\alpha_1\lambda_1 j_1\frac{(x-x_1)dz-(z-z_1)dx}{r^3},$$

$$Z = -\frac{1}{2}j\alpha_1\lambda_1 j_1\frac{(y-y_1)dx-(x-x_1)dy}{r^3}.$$

Folglich steht die Kraft ebenso senkrecht auf den Richtungen $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ und ds, wie die z-Axe auf den Richtungen x und y. Denken wir uns also in dem Strome schwimmend, das Gesicht nach dem Pole gekehrt, so wird das Stromelement nach rechts getrieben,

und wenn ein Solenoidsüdpol wirkt, so ist die Richtung die entgegengesetzte. Erinnern wir uns aber an die Ampèresche Regel (S. 4), so gilt genau dasselbe von einem magnetischen Nordpol und Südpol. Folglich entspricht der Nordpol eines Solenoids, wie wir denselben definirt haben, einem magnetischen Nordpol, der Südpol eines Solenoids einem magnetischen Südpol.

Kann also ein Magnet ersetzt werden durch zwei magnetische Pole mit den Massen $\pm \mu_1$, so kann an die Stelle eines solchen Magnets auch ein Solenoid gesetzt werden, dessen Pole mit den Polen des Magnets zusammenfallen, und dessen Constanten α_1, λ_1, j_1 so gewählt werden, dass

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 \lambda_1 j_1 .$$

Liegen die Magnetpole einander unendlich nahe, so haben wir ein magnetisches Molecül, und das Solenoid wird unendlich kurz; seine Axe fällt mit der magnetischen Axe des Molecüls zusammen; somit können wir uns einen Magnet statt aus magnetischen Molecülen aus unendlich vielen solcher unendlich kurzen Solenoide zusammengesetzt denken.

Dies führt uns unmittelbar zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus.

Ampère denkt sich jedes Eisen- oder Nickeltheilchen, u. s. w., auch im natürlichen, nicht magnetischen Zustande, von elektrischen Strömen umflossen; im natürlichen Zustande haben die Axen dieser Ströme alle möglichen Richtungen; der Akt der Magnetisirung besteht darin, dass die Axen ein und derselben Richtung, der magnetischen Axe des endlichen Magnets, zugeführt werden. Dieser Auffassung nach unterscheiden sich diamagnetische Körper in ihren Erscheinungen von den magnetischen, weil in jenen nach dem Princip der Induction elektrische Ströme erzeugt werden; wird einem diamagnetischen Molecül ein Magnet genähert, so erzeugt dieser in jenem einen elektrischen Strom, welcher durch Entfernung des Magnets wieder aufgehoben wird.

Diese Ampèresche Theorie des Magnetismus giebt eine sehr natürliche Erklärung der beobachteten Thatsache, dass der Magnetismus nicht beliebig kann vermehrt werden. Haben einmal die Normalen aller Ströme ein und dieselbe Richtung, so kann die Stärke des Magnets auf keine Weise vergrössert werden; es giebt ein Maximum der Magnetisirung. Diese Thatsache ist nach derjenigen älteren Vorstellung nicht gut erklärbar, welche eine Scheidung neutraler magnetischer Flüssigkeit annimmt; denn die Menge dieser neutralen Flüssigkeit kann nicht wohl begrenzt gedacht werden.

§ 51.

Wirkung zweier Solenoide auf einander.

Nun fragt sich aber, ob diese Ersetzung der Magnetpole durch Solenoidpole die sämmtlichen magnetischen Wirkungen erklärt. Denn neben den Wirkungen von Magneten auf elektrische Ströme haben wir die Kräfte, welche Magnete auf einander ausüben, und wir müssen daher noch untersuchen, ob zwei Solenoidpole auf einander gerade so wirken, wie zwei magnetische Massen auf einander.

Wir berechnen daher zunächst die Wirkung, welche ein Solenoid auf ein anderes ausübt. Zu diesem Ende gehen wir auf die Gleichungen (XI) (S. 131) zurück, welche die Wirkung eines unendlich kleinen Stromes auf einen andern unendlich kleinen Strom bestimmen. Hienach besteht die Wirkung des unendlich kleinen Stromes λ_1 an der Stelle x_1, y_1, z_1 auf den unendlich kleinen Strom λ an der Stelle x, y, z in einer Kraft, welche an dem Strome λ angreift, und die Componenten dieser Kraft sind

$$X_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{x-x_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1},$$

$$Y_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{y-y_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1},$$

$$Z_{\lambda_1,\lambda} = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \frac{\partial^2 \frac{z-z_1}{r^3}}{\partial n \partial n_1},$$

wo ∂n und ∂n_1 die positiven Normalen der beiden unendlich kleinen Ströme bezeichnen.

Nun seien die Pole des einen Solenoides a und b, die Pole des andern a_1 und b_1; die positiven Richtungen der Leitcurven gehen von a nach b und von a_1 nach b_1; die Elemente seien ds und ds_1, die Coordinaten der Stellen (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), die der Pole (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x_1', y_1', z_1'), (x_1'', y_1'', z_1''). Die Constanten der beiden Solenoide endlich werden mit α, λ, j und α_1, λ_1, j_1 bezeichnet. Dann sind die Componenten der Kraft, welche das Solenoid $a_1 b_1$ auf das Solenoid ab ausübt,

$$X = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1 \int_{a_1}^{b_1}\int_{a}^{b} \frac{\partial^2 \frac{x-x_1}{r^3}}{\partial s \partial s_1} ds ds_1,$$

$$Y = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1 \int_{a_1}^{b_1}\int_{a}^{b} \frac{\partial^2 \frac{y-y_1}{r^3}}{\partial s \partial s_1} ds ds_1,$$

$$Z = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1 \int_{a_1}^{b_1}\int_{a}^{b} \frac{\partial^2 \frac{z-z_1}{r^3}}{\partial s \partial s_1} ds ds_1.$$

Wir können die beiden Integrationen sofort ausführen und erhalten, wenn die Entfernungen aa_1, ab_1, ba_1, bb_1 mit $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$ bezeichnet werden,

$$X = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1 \left\{ \frac{x'-x_1'}{r_{1,1}} + \frac{x''-x_1''}{r_{2,2}} - \frac{x'-x_1''}{r_{1,2}} - \frac{x''-x_1'}{r_{2,1}} \right\},$$

$$Y = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1 \left\{ \frac{y'-y_1'}{r_{1,1}} + \frac{y''-y_1''}{r_{2,2}} - \frac{y'-y_1''}{r_{1,2}} - \frac{y''-y_1'}{r_{2,1}} \right\},$$

$$Z = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1 \left\{ \frac{z'-z_1'}{r_{1,1}} + \frac{z''-z_1''}{r_{2,2}} - \frac{z'-z_1''}{r_{1,2}} - \frac{z''-z_1'}{r_{2,1}} \right\}.$$

Hieraus folgt, dass die Kraft, welche ein Solenoid auf ein anderes ausübt, allein abhängt von der Lage der Pole. Ferner stossen gleichnamige Solenoidpole sich ab, ungleichnamige ziehen sich an. Endlich wirken die Kräfte in den Verbindungslinien der Pole, und ihre Grösse ist dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional. Lassen wir die beiden Südpole b und b_1 ins Unendliche fallen, so bleibt als Wirkung zwischen den beiden Nordpolen in der Entfernung r

$$\frac{jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1}{2r^2},$$

und vergleichen wir diese Wirkung mit der Kraft, welche zwei Magnetpole mit den magnetischen Flüssigkeiten μ und μ_1 in derselben Entfernung auf einander ausüben, nämlich

$$\frac{\mu\mu_1}{r^2},$$

so findet vollständige Uebereinstimmung statt, wenn wir setzen

$$\mu\mu_1 = \frac{1}{2} jj_1 \lambda\lambda_1 \alpha\alpha_1,$$

folglich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha\lambda j, \qquad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_1 \lambda_1 j_1.$$

§. 52.

Bestimmung der zu Grunde gelegten Einheit in der Biot-Savartschen Formel.

Vergleichen wir diese Relation mit der früher gefundenen (S. 141), so stossen wir auf eine Schwierigkeit. Wir haben, um einen Magnetpol bezüglich seiner Wirkung auf ein Stromelement durch einen Solenoidpol zu ersetzen, die Relation erhalten

$$\mu = \frac{1}{2} \alpha\lambda j,$$

während wir jetzt statt des Factors $\frac{1}{2}$ den Factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ setzen müssen, um die Wirkung zwischen zwei Magnetpolen der Wirkung zwischen zwei Solenoidpolen an Grösse gleich zu erhalten. Dieser Widerspruch

lässt sich formell leicht beseitigen; wir brauchen bloss in der Biot-Savartschen Formel, welche die Wirkung eines Magnetpoles μ auf ein Stromelement ds bestimmt (vergl. S. 17, 140), dem Nenner den Factor $\sqrt{2}$ hinzuzufügen; die Uebereinstimmung ist dann vollständig hergestellt.

Allein diese Einfügung des Factors $\sqrt{2}$ muss gerechtfertigt werden; gelingt das nicht, so wird die Ampèresche Theorie des Magnetismus umgestossen; dagegen liefert die Rechtfertigung einen schönen Beweis für die Richtigkeit der Ampèreschen Vorstellung.

Wir sehen sofort ein, dass das bisher Beigebrachte zur Entscheidung der Frage nicht ausreicht; es müssen die verschiedenen Wirkungen in Bezug auf ihre Grösse mit einander verglichen, folglich alle Kräfte in ein und demselben Maass gemessen werden.

Wir hatten zunächst die Wirkung zweier Stromelemente ds und ds_1 auf einander dargestellt durch den Ausdruck (Gl. (I), S. 102)

$$(1) \qquad w_1 = -\frac{jj_1 ds ds_1}{r^2}\left(\sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos\eta - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta_1\right),$$

wo alle Grössen die im Vorhergehenden angenommene Bedeutung haben. Einen constanten Factor brauchen wir nicht beizufügen, indem wir aus diesem Ausdruck die Einheit der Stromstärke bestimmen, d. h. indem wir die Werthe von j und j_1 so annehmen, dass der Factor 1 wird. Dies führt zu dem folgenden Resultat:

Da wir uns bestimmte Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse zu Grunde gelegt denken, ist für die Wirkung w_1, welche einer bewegenden Kraft äquivalent ist, ein Maass festgesetzt; die Wirkung ist gleich 1, wenn sie der Einheit ponderabler Masse die Beschleunigung 1, also während der Zeit 1 wirkend die Geschwindigkeit 1 ertheilt. Nehmen wir nun an, dass die beiden Elemente in einer Ebene senkrecht auf ihrer Verbindungslinie liegen und die Ströme in parallelen Richtungen fliessen, so ist

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_1 = 0, \qquad \sin\vartheta = \sin\vartheta_1 = 1, \qquad \cos\eta = 1,$$

und wir finden

$$w_1 = -\frac{jj_1 ds ds_1}{r^2}.$$

Setzen wir noch $j = j_1$, so können wir die Einheit der Stromstärke folgendermaassen definiren: Wenn zwei Elemente von der Länge 1 in der Entfernung 1 parallel und senkrecht auf ihre Verbindungslinie aufgestellt sind, und wenn durch beide der Strom j in derselben Richtung fliesst, so ist die Stromstärke der Einheit gleich, falls die Wirkung gleich 1 ist.

Damit sei das Maass der Stromstärke ein für alle Mal festgestellt.

Wir haben zweitens die Wirkung zwischen zwei Magnetpolen mit

den freien magnetischen Flüssigkeiten μ und μ_1 in der Entfernung r gleich gesetzt

$$w_2 = \frac{\mu\,\mu_1}{r^2}. \tag{2}$$

Aus diesem Ausdruck folgt das Maass für die magnetische Flüssigkeit.

Denken wir uns in zwei Stellen, welche in der Entfernung 1 von einander liegen, die Einheit magnetischer Flüssigkeit enthalten, so muss die Wirkung gleich 1 sein.

Wir betrachten drittens die Wirkung zwischen einem Magnetpol und einem Stromelement; dieselbe ist nach dem Biot-Savartschen Gesetz

$$w_3 = \varkappa\,\frac{\mu j ds \sin(r, ds)}{r^2}. \tag{3}$$

Hier darf nun der Factor $\varkappa$ nicht gleich 1 gesetzt werden; denn wir haben für die Grössen j und μ eben ein Maass festgesetzt, und wir müssen diese Maasse beibehalten.

Es handelt sich also darum, die Wirkung w_3 zu messen; hieraus folgt dann der Werth von $\varkappa$, wenn j und μ bekannt sind; um aber diese letztern zu finden, müssen die Wirkungen w_1 und w_2 gemessen werden. Folglich kommt es darauf an, die dreierlei Wirkungen mit einander zu vergleichen; so wird der Factor $\varkappa$ bestimmt, und es fragt sich dann, ob der empirisch gefundene Werth wirklich der aus der Ampèreschen Theorie des Magnetismus folgende, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, ist. Nach den genauesten bisher angestellten Versuchen ist diese Frage zu bejahen; die Ampèresche Theorie stimmt also mit der Erfahrung überein.

Wir geben hier nur eine schematische Uebersicht über den Verlauf der Beobachtungen; die Messungen sollen mit einer sehr empfindlichen Waage vorgenommen werden.

Im ersten Fall wird an dem einen Hebelarm ein Drahtring horizontal aufgehängt, an dem andern Hebelarm ein Gegengewicht; unter dem Drahtring befindet sich ein zweiter, ebenfalls horizontal gestellt und so, dass die Mittelpunkte beider Kreise in derselben Verticalen liegen; durch die beiden Ringe kann ein Strom geleitet werden. Geschieht dies, und fliesst in beiden Ringen der Strom in derselben

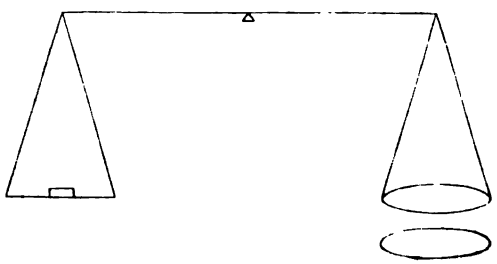


Fig. 53.

Richtung, so muss ein weiteres Gegengewicht G_1 in die Waagschale gelegt werden, damit die Waage ihre ursprüngliche Lage behalte.

Die zweite Beobachtung geschieht in der Art, dass die beiden Kreisströme durch Magnete ersetzt werden, deren Axen vertical stehen; das jetzt anzubringende Gegengewicht sei G_2.

In der dritten und vierten Beobachtung wird der zweite Drahtring durch den einen und durch den andern Magnet ersetzt; die jetzt anzubringenden Gegengewichte seien G_3 und G_4.

Die Grössen G sind bestimmte Gewichte; sie messen die Wirkungen in den vier Fällen, und der Factor $\varkappa$, welcher in das Biot-Savartsche Gesetz einzuführen ist, lässt sich durch die Werthe G ausdrücken.

In Wirklichkeit werden die Messungen nicht mittelst einer gewöhnlichen Waage, sondern mittelst einer bifilar aufgehängten Drehwaage angestellt, da sehr kleine Grössen genau zu messen sind; für den Gang der Beobachtung ist dies gleichgiltig.

Wir gehen auf die Berechnung der Wirkung in den vier Fällen noch etwas näher ein, führen aber die Rechnung nicht mit derjenigen Genauigkeit durch, welche bei einer wirklichen Bestimmung von $\varkappa$ nöthig wäre, sondern begnügen uns immer mit der ersten Näherung. Es soll bloss gezeigt werden, wie der Werth von $\varkappa$ aus den Daten der vier Beobachtungen folgt.

Zuerst berechnen wir die Wirkung zwischen zwei horizontalen Kreisströmen, deren Mittelpunkte auf derselben Verticalen liegen. Die Halbmesser der Kreise seien R und R_1, der Abstand ihrer Mittelpunkte E. Das Potential der beiden Ströme auf einander ist

$$P = -\frac{1}{2} jj_1 \int\int \frac{\cos(ds, ds_1)\, ds\, ds_1}{r};$$

in unserm Falle ist P eine Function von E, und die gesuchte Wirkung wird bestimmt durch

$$-\frac{\partial P}{\partial E}.$$

Diese Kraft ist positiv gerechnet, wenn Abstossung stattfindet; das anzubringende Gegengewicht ergiebt sich demnach als

$$G_1 = \frac{\partial P}{\partial E}. \tag{1}$$

Die beiden Ströme sollen in derselben Richtung durch die Kreise fliessen; ferner seien die Stellen s und s_1 auf den Kreisen bestimmt durch die Winkel φ und φ_1, welche der Radiusvector mit einer festen Richtung bildet; dann wird

$$P = -\frac{1}{2} jj_1 RR_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi-\varphi_1)\, d\varphi\, d\varphi_1}{\sqrt{E^2+R^2+R_1^2-2RR_1\cos(\varphi-\varphi_1)}}.$$

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, es sei E gegen R und R_1 ziemlich gross, so dass wir die Wurzelgrösse nach Potenzen von $\cos(\varphi - \varphi_1)$ entwickeln und schon mit dem zweiten Gliede abbrechen können; wir erhalten dann

$$P = -\frac{1}{2}\frac{jj_1 RR_1}{\sqrt{E^2+R^2+R_1^2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+\frac{RR_1\cos(\varphi-\varphi_1)}{E^2+R^2+R_1^2}\right\}\cos(\varphi-\varphi_1)\,d\varphi\,d\varphi_1,$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$P = -\pi^2 jj_1\frac{R^2R_1^2}{(E^2+R^2+R_1^2)^{3/2}}.$$

Folglich wird

$$G_1 = 3\pi^2 jj_1\frac{R^2R_1^2E}{(E^2+R^2+R_1^2)^{5/2}},$$

oder, wenn wir jetzt $j = j_1$, $R = R_1$ setzen und im Nenner R^2 neben E^2 vernachlässigen,

$$G_1 = 3\pi^2\frac{R^4}{E^4}j^2. \tag{2}$$

Diese Formel ist bis auf den Zahlenfactor jedenfalls genau; es folgt daraus

$$j^2 = \frac{1}{3\pi^2}\frac{E^4}{R^4}G_1,$$

und hier ist die Stromstärke j in den oben eingeführten Einheiten ausgedrückt.

Zweitens denken wir uns die beiden Kreisströme ersetzt durch zwei Magnete und machen gleich die folgenden Voraussetzungen: Die Querschnitte der beiden Magnete sollen sehr klein sein; ferner soll jedes Molecül so gerichtet sein, dass seine Axe mit der Axe des Magnetes zusammenfalle.

Die Magnete seien mit ihren Axen vertical aufgestellt, das Nordende nach oben; ihre Mitten seien um E von einander entfernt; die Abstände eines Molecüls von der Mitte werden mit x und x_1 bezeichnet. Dann ist die Wirkung zwischen den beiden nordmagnetischen Massen μ und μ_1 gleich

$$\frac{\mu\mu_1}{(E+x_1-x)^2}.$$

Gehen wir über zu dem negativen Pol des Molecüles x_1 mit der Masse $-\mu_1$, an der Stelle $x_1 - \delta x_1$, so haben wir das Vorzeichen umzukehren und statt x_1 $x_1 - \delta x_1$ zu schreiben; die Summe der beiden Wirkungen wird also

$$\mu\mu_1\,\delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{(E+x_1-x)^2}.$$

Hiezu kommt die Wirkung der südmagnetischen Masse $-\mu$ an der

Stelle $x - \delta x$, und wir finden sofort als Summe der vier Wirkungen zwischen $\pm\mu$ und $\pm\mu_1$

$$\mu\mu_1\delta x\delta x_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{(E+x_1-x)^2}}{\partial x\partial x_1}.$$

Hierin bedeuten $\mu\delta x$ und $\mu_1\delta x_1$ die magnetischen Momente der beiden Molecüle, welche wir mit m und m_1 bezeichnen wollen. Um die Gesammtwirkung der Magnete auf einander zu erhalten, wäre die Summe der Ausdrücke

$$-\frac{\partial^2 \frac{1}{(E+x_1-x)^2}}{\partial x\partial x_1} m m_1$$

in Bezug auf die sämmtlichen Molecüle m und m_1 der beiden Magnete zu nehmen; hierin sind m und m_1 unbekannte Functionen von x und von x_1.

Wir berechnen wieder einen angenäherten Werth, indem wir annehmen, die Entfernung E sei sehr gross gegen die Längen der beiden Magnete, welche wir mit $2a$ und $2a_1$ bezeichnen wollen. Wir theilen die beiden Magnete durch unendlich nahe Querschnitte in unendlich kleine Elemente von der Länge dx, dx_1; die magnetischen Momente dieser Elemente seien $m'dx$, $m_1'dx_1$; die Anziehung G_2 wird dann durch das Doppelintegral bestimmt

$$(3) \qquad G_2 = -\int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a}^{a} \frac{\partial \frac{1}{(E+x_1-x)^2}}{\partial x\partial x_1} m'dx \cdot m_1'dx_1,$$

indem oben die Wirkung positiv gerechnet wurde, wenn Abstossung stattfindet. Entwickeln wir nun nach fallenden Potenzen von E, so wird

$$\frac{1}{(E+x_1-x)^2} = \frac{1}{E^2}\left\{1 - 2\frac{x_1-x}{E} + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{(x_1-x)^2}{E^2} - \cdots\right\},$$

und wenn wir mit dem dritten Gliede abbrechen, so ergiebt sich

$$G_2 = \frac{6}{E^4}\int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a}^{a} m'dx \cdot m_1'dx_1,$$

wo m' Function von x, m_1' Function von x_1 ist. Die beiden Integrale

$$\int_{-a}^{a} m'dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-a_1}^{a_1} m_1'dx_1$$

sind die magnetischen Momente der beiden endlichen Magnete; wir bezeichnen sie mit M und M_1; dann ist

$$(4) \qquad G_2 = \frac{6}{E^4} M M_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$MM_1 = \frac{1}{6} E^4 G_2;$$

das Quadrat eines magnetischen Momentes ist also gleich dem Product einer bewegenden Kraft in die vierte Potenz einer Länge.

Wir wenden uns zu der dritten Beobachtung und berechnen die Wirkung eines Kreisstromes von dem Halbmesser R auf einen Magnet von dem Moment M.

Der Magnet sei senkrecht unter dem Mittelpunkt des Kreises aufgestellt und die Mitte des Magnets von der Ebene des Kreises um E entfernt; der Nordpol des Magnetes liege oben, und der Strom fliesse so, dass Anziehung stattfinde; im Uebrigen gelten die früheren Bezeichnungen.

Dann übt die magnetische Masse μ auf das Stromelement $Rd\varphi$ die Kraft aus

$$\frac{\varkappa \mu j R d\varphi}{(E-x)^2+R^2},$$

indem das Stromelement auf der Verbindungslinie senkrecht steht, und die verticale Componente dieser Kraft, nach oben positiv gerechnet, wird

$$-\frac{\varkappa \mu j R^2 d\varphi}{\{(E-x)^2+R^2\}^{3/2}}.$$

Hiezu kommt die Wirkung des zweiten Poles $-\mu$ an der Stelle $x-\delta x$, und die Wirkung des ganzen Molecüles auf den Kreisstrom wird

$$-2\pi \varkappa j \mu \delta x R^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\{(E-x)^2+R^2\}^{3/2}}.$$

Wir setzen nun wieder

$$\mu \delta x = m = m' dx,$$

integriren in Bezug auf x von $-a$ bis a, und erhalten als Werth der Anziehung in diesem Falle:

$$G_3 = 2\pi \varkappa j R^2 \int_{-a}^{a} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\{(E-x)^2+R^2\}^{3/2}} m' dx. \tag{5}$$

Wir entwickeln die reciproke dritte Potenz der Entfernung nach steigenden Potenzen von x, brechen mit dem zweiten Gliede ab,

$$\frac{1}{\{(E-x)^2+R^2\}^{3/2}} = \frac{1}{(E^2+R^2)^{3/2}} \left\{1 + \frac{3Ex}{E^2+R^2} + \cdots\right\},$$

und erhalten

$$G_3 = \frac{6\pi \varkappa j R^2 E}{(E^2+R^2)^{5/2}} \int_{-a}^{a} m' dx,$$

also, wenn wieder M das Moment des Magnets bezeichnet und R neben E vernachlässigt wird,

$$G_3 = \frac{6\pi \varkappa j R^2}{E^4} M. \tag{6}$$

Durch Einführung des andern Magnets mit dem Momente M_1 erhalten wir endlich die Wirkung in dem vierten Falle

$$G_4 = \frac{6\pi \varkappa j R^2}{E^4} M_1. \tag{7}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (6) und (7)

$$G_3 G_4 = \left(\frac{6\pi \varkappa j R^2}{E^4}\right)^2 M M_1,$$

dagegen aus den Gleichungen (2) und (4)

$$G_1 G_2 = 3\pi^2 \frac{R^4}{E^4} j^2 \cdot \frac{6}{E^4} M M_1;$$

mithin ergiebt sich

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2} \frac{G_3 G_4}{G_1 G_2}.$$

Zeigen also die Messungen, dass

$$G_1 G_2 = G_3 G_4,$$

so wird

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

und die Ampèresche Theorie des Magnetismus steht mit der Erfahrung in Einklang.

Die wirklich angestellten Beobachtungen haben zu diesem Resultat geführt; dasselbe macht eine kleine Modification nöthig in all den Formeln, welchen das Biot-Savartsche Gesetz zu Grunde gelegt ist; es muss der Factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hinzugefügt werden. Dies kommt namentlich da in Betracht, wo Wirkungen von Strömen auf Ströme mit denen von Magneten auf Ströme verglichen werden.

§. 53.

Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Solenoid und Bestimmung des Angriffspunktes.

Wir haben schliesslich noch einen sehr wichtigen Punkt zu untersuchen in Bezug auf die Ampèresche Vorstellung von dem Magnetismus; er ist entscheidend für die Beantwortung der Frage, ob an die Stelle einer magnetischen Masse schlechtweg der Pol eines Solenoides kann gesetzt werden. Wirkt nämlich ein geschlossener Strom auf ein unbegrenztes Solenoid, so ist durch die vorhergehenden Entwicklungen nicht nachgewiesen, dass diese Wirkung in einer Kraft besteht, welche an dem Pol des Solenoides angreift; denn wir haben bisher nur die Richtung und Grösse der resultirenden Kraft bestimmt, niemals ihre

Lage. Diese hängt von dem resultirenden Drehungsmoment ab, und es fragt sich, ob das Drehungsmoment verschwindet, sobald wir den Angriffspunkt der resultirenden Kraft in den Solenoidpol legen. Ist dies der Fall, so entspricht der Solenoidpol in jeder Hinsicht einem magnetischen Pol, d. h. einer magnetischen Masse.

Wir können die Frage auch umkehren: Ein unbegrenztes Solenoid wirke auf einen geschlossenen Strom oder auf ein System von geschlossenen Strömen; ist diese Wirkung äquivalent einer Kraft, welche durch den Solenoidpol geht? Denn da nach dem Ampèreschen Gesetze zwei Stromelemente entgegengesetzt gleiche Kräfte in der Richtung der Verbindungslinie auf einander ausüben, und da dieses Gesetz unsrer ganzen Entwicklung zu Grunde liegt, ist die Wirkung des Stromsystemes auf das Solenoid der Wirkung des Solenoides auf das Stromsystem entgegengesetzt gleich; besteht also die letztere Wirkung in einer Kraft, deren Richtungslinie durch den Solenoidpol geht, so gilt dasselbe von der Wirkung des Stromsystems auf das Solenoid.

Es bezeichne (x, y, z) eine Stelle des geschlossenen Stromes s von der Stärke j, (ξ, η, ζ) den Pol p eines unbegrenzten Solenoides, der ein Nordpol sei; ferner seien A_p, B_p, C_p die Determinanten des Solenoids an der Stelle (x, y, z), X_p, Y_p, Z_p die Componenten der Kraft, welche das Solenoid auf den geschlossenen Strom ausübt. Dann sind die Componenten der Kraft, welche das Solenoid auf das Stromelement ds ausübt, (Gl. 2, S. 120),

$$X_p' = jj_1 (C_p dy - B_p dz),$$

u. s. w.

und die Componenten der Kraft, welche das Solenoid auf den ganzen geschlossenen Strom ausübt,

$$X_p = jj_1 \int (C_p dy - B_p dz),$$

wo das Integral über den geschlossenen Strom zu nehmen ist. Setzen wir endlich die Werthe der Determinanten ein, (Gl. XIII, S. 139),

$$A_p = -\frac{1}{2} \alpha_1 \lambda_1 \frac{x-\xi}{r_1^3},$$

u. s. w.

so werden die Componenten der Gesammtwirkung

$$(1) \qquad X_p = -\frac{1}{2} j \alpha_1 \lambda_1 j_1 \int \frac{(z-\zeta) dy - (y-\eta) dz}{r^3},$$

u. s. w.

Hierin bedeuten α_1, λ_1, j_1 die Constanten des Solenoids.

Wir vergleichen diese Ausdrücke mit den Werthen für die Determinanten des Stromes s an der Stelle (ξ, η, ζ), wo sich der Solenoidpol befindet; diese Werthe sind, (Gl. VII, S. 121),

(2) $$A_s = \frac{1}{2}\int \frac{(\xi - z)\,dy - (\eta - y)\,dz}{r^3},$$

u. s. w.

Hieraus folgt:

(3) $$\begin{cases} X_p = j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,A_s, \\ Y_p = j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,B_s, \\ Z_p = j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,C_s; \end{cases}$$

die Componenten der Kraft, welche das Solenoid auf den Strom ausübt, verhalten sich, wie die Determinanten des Stromes an der Stelle des Solenoidpoles. Und daraus ergeben sich weiter für die Componenten der Kraft, welche der geschlossene Strom auf das Solenoid ausübt, die entgegengesetzt gleichen Werthe

(4) $$\begin{cases} X_s = -j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,A_s, \\ Y_s = -j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,B_s, \\ Z_s = -j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,C_s; \end{cases}$$

die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Solenoidpol fällt mit der Richtung der Directrix zusammen.

Vergleichen wir also die Wirkungen, welche ein geschlossener Strom einmal auf ein Stromelement $d\sigma$ und dann auf einen Solenoidpol p an derselben Stelle (ξ, η, ζ) ausübt, und drücken wir beide Wirkungen durch die Directrix D_s des Stromes an der Stelle (ξ, η, ζ) aus, so ist die Wirkung auf das Stromelement gleich (S. 122)

$$jj_1\,D_s \sin(D_s, d\sigma)\,d\sigma,$$

dagegen die Wirkung auf den Solenoidpol gleich

$$j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,D_s.$$

Beide Wirkungen sind der Grösse der Directrix proportional. Dagegen steht die Richtung der erstern Kraft senkrecht auf der Directrix und auf dem Stromelement, die der letztern fällt mit der Directrix zusammen; die beiden Kräfte stehen also auf einander senkrecht.

Wir weisen nun nach, dass die Resultante der Kraft, welche das Solenoid auf die sämmtlichen Elemente eines geschlossenen Stromes ausübt, durch den Solenoidpol geht. Zu diesem Ende müssen wir auch die resultirenden Drehungsmomente berechnen.

Und zwar wollen wir das Drehungsmoment berechnen, welches aus der Wirkung des Solenoides auf den geschlossenen Strom hervorgeht, in Bezug auf eine Axe, die durch den beliebigen Punkt (a, b, c) parallel der z-Axe gelegt ist. Wir finden

$$N = \int\{(x - a)\,Y_p' - (y - b)\,X_p'\},$$

wo das Integral über alle Elemente ds des geschlossenen Stromes zu nehmen ist, und schreiben hiefür

$$N = \int\{(x-\xi)\,Y_p' - (y-\eta)\,X_p'\} + \int\{(\xi-a)\,Y_p' - (\eta-b)\,X_p'\}.$$

Da $(\xi - a)$, $(\eta - b)$ von s unabhängig sind, können wir das letztere Integral ausführen und finden

$$N = \int\{(x-\xi)\,Y_p' - (y-\eta)\,X_p'\} + (\xi-a)\,Y_p - (\eta-b)\,X_p;$$

es bleibt der Werth des ersteren Integrales aufzusuchen. Setzen wir für X_p' und Y_p' ihre Werthe ein, so lässt sich das Resultat sofort auf die Form bringen:

$$\int\{(x-\xi)\,Y_p' - (y-\eta)\,X_p'\} =$$

$$= -\frac{1}{2} j\alpha_1\lambda_1 j_1 \int\left\{\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\xi)^2}{r^3}\,dz - (z-\zeta)\,\frac{(x-\xi)\,dx+(y-\eta)\,dy+(z-\xi)\,dz}{r^3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2} j\alpha_1\lambda_1 j_1 \int \frac{\partial\,\frac{z-\zeta}{r}}{\partial s}\,ds.$$

Folglich verschwindet das Integral, wenn dasselbe über den ganzen geschlossenen Strom ausgedehnt wird*), und wir erhalten für das gesuchte Drehungsmoment den Werth:

$$N = (\xi - a)\,Y_p - (\eta - b)\,X_p.$$

Auf demselben Wege hätten wir für die beiden andern Drehungsmomente um den x und y parallele Axen erhalten:

$$L = (\eta - b)\,Z_p - (\zeta - c)\,Y_p,$$
$$M = (\zeta - c)\,X_p - (\xi - a)\,Z_p.$$

Hieraus geht hervor, dass das Drehungsmoment in Bezug auf jede durch den Pol (ξ, η, ζ) gelegte Axe verschwindet. Folglich besteht die Wirkung, welche das Solenoid auf einen geschlossenen Strom ausübt, in einer Kraft, deren Richtungslinie durch den Pol geht, und dasselbe muss dann auch gelten von der Wirkung des Solenoides auf ein Stromsystem. Also können wir uns die Wirkung immer ausgehend denken von dem Solenoidpol, und umgekehrt wird die Wirkung, welche von einem geschlossenen Strom, oder von einem System geschlossener Ströme, auf ein unbegrenztes Solenoid ausgeübt wird, immer an dem Solenoidpol angreifen. Demnach ist der Solenoidpol einem Magnetpol vollkommen gleich, so weit es sich um Wirkungen handelt, welche geschlossene Ströme ausüben.

Bei der Wirkung eines Solenoides auf ein anderes kommen also bloss die Constanten der Solenoide in Betracht und die Lage ihrer Pole; denn ein Solenoid ist ja auch als ein System von geschlossenen

*) Ist der Strom nicht geschlossen, so verschwindet das Integral nicht; sein Werth wird aber allein abhängig von der Lage der Stromenden, im Uebrigen von der Gestalt des Stromes vollkommen unabhängig. Wir werden bei der Theorie der Induction hierauf zurückkommen.

Strömen aufzufassen. Ist ein Solenoid um eine feste Axe drehbar, so finden wir die Wirkung, indem wir Ebenen legen durch die Axe und durch die Solenoidpole; von der Kraft, welche an dem Pol angreift, kommt nur die Componente in Betracht, die auf der betreffenden Ebene senkrecht steht.

§. 54.

Anwendung auf die Berechnung der Wirkung, welche der Erdmagnet auf ein Solenoid ausübt.

Wir wollen hiervon gleich eine Anwendung machen, indem wir die Kraft berechnen, welche der Erdmagnet auf ein drehbares Solenoid ausübt.

Ein gerades Solenoid sei in der Mitte an einem Faden aufgehängt, so dass dasselbe um eine verticale Axe drehbar ist; es sei dies die z-Axe, während die y-Axe in den Meridian fallen soll; der Sitz der erdmagnetischen Kraft fällt dann in eine Stelle η, ζ der (y, z)-Ebene so dass $\xi = 0$ ist; das Verhältniss $\frac{\eta}{\zeta}$ bestimmt die magnetische Inclination.

Nun seien A_s, B_s, C_s die Determinanten eines beweglichen Stromsystemes an der Stelle (ξ, η, ζ); dann sind die Componenten der Kraft, welche der Pol $(\alpha_1, \lambda_1, j_1)$ auf das bewegliche Stromsystem ausübt (Gl. 3, S. 152),

$$X_p = j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\, A_s,$$
$$Y_p = j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\, B_s,$$
$$Z_p = j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\, C_s,$$

und der Angriffspunkt dieser Kraft liegt in dem Pole p. Folglich wird das Drehungsmoment um die z-Coordinatenaxe

$$N = \xi Y_p - \eta X_p = -j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\, A_s\,\eta\,.$$

Wir setzen nun für das bewegliche Stromsystem das Solenoid; dessen Determinanten an der Stelle (ξ, η, ζ) sind, wenn seine beiden Pole, der Nordpol und der Südpol, an den Stellen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) liegen (S. 139),

$$A_s = -\frac{1}{2}\,\alpha\lambda\left(\frac{\xi - x_1}{r_1^3} - \frac{\xi - x_2}{r_2^3}\right).$$

Da aber der magnetische Erdpol sehr weit entfernt liegt, haben wir neben $\xi = 0$

$$r_1^2 = r_2^2 = r^2 = \eta^2 + \zeta^2;$$

folglich wird

$$A_s = \frac{1}{2}\,\alpha\lambda\,\frac{x_1 - x_2}{r^3},$$

und wir erhalten für das Drehungsmoment den Werth

$$N = -\frac{1}{2}\alpha\lambda j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,\frac{x_1 - x_2}{r^2}\,\frac{\eta}{r}.$$

Dieser Ausdruck ist dem Drehungsmoment, welches die erdmagnetische Kraft auf einen Magnet ausübt, völlig gleich.

Denken wir uns ferner im Pol die freie magnetische Flüssigkeit μ enthalten, und nennen wir den Winkel ν, welchen die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit dem Horizont bildet, so haben wir

$$\frac{\alpha_1\lambda_1 j_1}{\sqrt{2}} = \mu \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{r} = \cos\nu;$$

weiter wird die Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft

$$H = -\frac{\mu}{r^2}\cos\nu,$$

indem wir diese Componente positiv nehmen und beachten, dass am Nordpol der Erde ein magnetischer Südpol anzunehmen ist. Mithin wird

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\lambda j \cdot H(x_1 - x_2).$$

Bezeichnen wir endlich den Abstand der Solenoidpole mit L, das magnetische Moment des Solenoides mit M und den Winkel mit φ, den die Axe des Solenoides, vom Südpol zum Nordpol positiv gerechnet, mit dem Meridian bildet, so haben wir

$$x_1 - x_2 = -L\sin\varphi, \qquad \frac{\alpha\lambda j}{\sqrt{2}} \cdot L = M,$$

folglich

$$N = -HM\sin\varphi.$$

Wir gelangen also zu demselben Ausdruck, den wir oben (S. 17) für das Drehungsmoment der erdmagnetischen Kraft auf einen Magnet gefunden haben.

§. 55.

Ampères Satz über die Ersetzung eines geschlossenen Stromes durch eine magnetische Doppelfläche.

Zum Schlusse wollen wir noch einen sehr allgemeinen und sehr hübschen Satz von Ampère ableiten; er heisst vorzugsweise der Ampèresche Satz und lautet:

Die Wirkung irgend eines geschlossenen Stromes kann immer ersetzt werden durch die einer magnetischen Doppelfläche, welche von dem Strome begrenzt, im Uebrigen aber ganz beliebig gestaltet ist.

Unter magnetischer Doppelfläche versteht Ampère eine Oberfläche, welche auf ihren beiden Seiten mit freiem magnetischem Fluidum belegt ist, auf der einen Seite mit positivem, auf der andern Seite mit

negativem.*) In der Allgemeinheit des Satzes liegt seine grosse Wichtigkeit. Die Wirkung des geschlossenen Stromes wird allerdings durch ein einfaches Integral dargestellt, die der magnetischen Doppelfläche dagegen durch ein Doppelintegal; allein da wir die Oberfläche, über welche die Integration auszudehnen ist, nach Belieben auswählen können, je nach dem Coordinatensystem, das wir aus andern Gründen gewählt haben, ist in manchen Fällen die weitere Behandlung des Doppelintegrales leichter, als die des einfachen.

Die Ampèresche Belegung wird auf dem folgenden Wege gefunden. Wir legen eine beliebige Oberfläche durch den Strom, zerlegen den von der Stromcurve begrenzten Theil der Oberfläche in Elemente und denken uns alle diese Elemente von Strömen derselben Stärke in demselben Sinne umflossen; wir ersetzen also, wie wir dies schon oft gethan haben, den endlichen geschlossenen Strom durch unendlich viele unendlich kleine geschlossene Ströme. Wir haben früher nur den Fall einer Ebene betrachtet; doch wird durch Annahme einer durch den Strom gelegten krummen Oberfläche nichts geändert.

Jeder der Elementarströme aber kann aufgefasst werden als ein unendlich kurzes Solenoid und an die Stelle des letztern ein magnetisches Molecül gesetzt werden, oder zwei magnetische Pole über und unter der Ebene des unendlich kleinen Stromes. So wird die ganze Oberfläche auf ihren beiden Seiten mit magnetischen Polen bedeckt, und indem wir uns die magnetischen Flüssigkeiten über die betreffenden unendlich kleinen Flächenelemente vertheilt denken, erhalten wir die magnetische Doppelbelegung der Fläche.

Die Dichtigkeit dieser Belegung berechnen wir, indem wir die Wirkung eines Elementarstromes auf einen Solenoidpol mit der Wirkung des entsprechenden magnetischen Molecüls auf denselben Solenoidpol vergleichen.

Der Strom umkreise die Fläche λ, und die positive Richtung der Normale auf den Strom werde mit dn bezeichnet; ferner liege das Element λ an der Stelle (x, y, z) der krummen Oberfläche; dann sind die Componenten der Wirkung, welche der Elementarstrom auf den Solenoidnordpol $(\alpha_1, \lambda_1, j_1)$ an der Stelle (ξ, η, ζ) ausübt, (nach Gl. 4, S. 152),

$$X_\lambda = -j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\, A_\lambda, \text{ u. s. w.}$$

Hierin sind [Gl. (IX, c), S. 130],

$$A_\lambda = \frac{1}{2}\,\lambda\,\frac{\partial\,\frac{\xi-x}{r^3}}{\partial n}, \text{ u. s. w.}$$

*) Ampère hatte angenommen, dass die Belegung der Oberfläche mit Masse immer auf beiden Seiten eine gleichförmige sei. Wie Herr Emil Weyr bemerkt hat (Wiener Sitzungsberichte, 56. Bd., II. Abth., 1867), trifft dies im Allgemeinen nicht zu, sondern nur dann, wenn die betreffende Oberfläche eine Ebene ist.

Mithin werden die Componenten

$$X_\lambda = -\frac{1}{2}\lambda j\,\alpha_1\lambda_1 j_1\,\frac{\partial\frac{\xi-x}{r^3}}{\partial n}, \text{ u. s. w.,}$$

oder, wenn wir uns den Solenoidpol durch die freie magnetische Flüssigkeit μ ersetzt denken,

$$X_\lambda = -\frac{\lambda j}{\sqrt{2}}\mu\,\frac{\partial\frac{\xi-x}{r^3}}{\partial n}, \text{ u. s. w.}$$

Dagegen sind die Componenten der Wirkung, welche ein magnetisches Molecül mit den Massen $\pm m$ an der Stelle (x, y, z), dessen Axe vom Nordpol zum Südpol positiv gerechnet mit der Richtung dn zusammenfällt, auf die Masse μ an der Stelle (ξ, η, ζ) ausübt,

$$-m\mu\,\frac{\partial\frac{\xi-x}{r^3}}{\partial n}\,dn, \text{ u. s. w.}$$

Demnach haben wir, wenn die Wirkungen einander gleich sein sollen,

$$m\,dn = \frac{\lambda j}{\sqrt{2}}.$$

Wir können somit den Elementarstrom λ, j mit der Normale dn ersetzen durch die beiden Magnetpole $\pm\frac{\lambda j}{\sqrt{2}\,dn}$ in dem Abstand dn.

Vertheilen wir aber die Masse $+\frac{\lambda j}{\sqrt{2}\,dn}$ auf der Fläche λ, so wird die Dichtigkeit der Belegung gleich $\frac{j}{\sqrt{2}\,dn}$, demnach immer unendlich gross.

In dem Fall einer Ebene erhalten wir eine gleichförmige Belegung auf beiden Seiten derselben, wenn wir den Abstand dn constant setzen; denn wir haben entgegengesetzt gleiche Massen auf gleich grossen Flächen zu vertheilen, und die Dichtigkeiten $\pm\frac{j}{\sqrt{2}\,dn}$ sind constant.

§. 56.

Ableitung des Satzes durch Umformung des Doppelintegrals.

Wir wollen noch umgekehrt den Ampèreschen Satz ableiten durch Umformung eines der drei Doppelintegrale, welche die Wirkung darstellen, in ein einfaches Integral.

Wir betrachten die Z-Componente. An der Stelle x, y, z der Doppelfläche liege das Element do, und die Wirkung werde ausgeübt auf die Masse μ an der Stelle ξ, η, ζ; die Verbindungslinie der beiden Stellen, von der letzteren zur ersteren positiv gerechnet, bilde mit der z-Axe den Winkel φ. Dann ist nach dem Ampèreschen Satz

$$Z = \frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \partial \frac{\frac{\cos\varphi}{r^2}}{\partial n} do,$$

wo das Integral über alle Elemente do der vom Strom j begrenzten Fläche zu nehmen ist; dn bezeichnet immer die positive Normale auf den Elementarstrom.

Wir führen statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z die Polarcoordinaten r, φ, u ein und bezeichnen Differentiationen nach der Normale mit dem Buchstaben δ, um dieselben von den Differentiationen d nach der Oberfläche zu unterscheiden. Dann sind die Projectionen der Strecke δn auf die Richtungen r, φ, u gleich

$$\delta r, \qquad r\delta\varphi, \qquad r \sin\varphi\, \delta u,$$

dagegen die Projectionen der unendlich kleinen Strecke $d\sigma$ in der Oberfläche

$$dr, \qquad r\, d\varphi, \qquad r \sin\varphi\, du.$$

Wir haben ferner, wenn wir unter dem Integral die Differentiation nach der Normale ausführen,

$$Z = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \left\{ \frac{\sin\varphi}{r^2} \frac{\delta\varphi}{\delta n} + \frac{2\cos\varphi}{r^3} \frac{\delta r}{\delta n} \right\} do.$$

Da aber die Richtungen δn und $d\sigma$ auf einander senkrecht stehen, ist

$$\delta r\, dr + r^2 \delta\varphi\, d\varphi + r^2 \sin^2\varphi\, \delta u\, du = 0,$$

und wenn wir uns durch die Gleichung der Oberfläche r als Function von φ und u gegeben denken, wonach

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial r}{\partial u} du,$$

so muss die obige Gleichung identisch in Bezug auf $d\varphi$ und auf du erfüllt sein; hieraus folgt

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} \delta r + r^2 \delta\varphi = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial u} \delta r + r^2 \sin^2\varphi\, \delta u = 0,$$

mithin

$$\delta\varphi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \delta r.$$

Setzen wir diesen Werth in das Integral ein, so nimmt dasselbe die Form an

$$Z = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{2\cos\varphi}{r^3} - \frac{\sin\varphi}{r^4} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) \frac{\delta r}{\delta n} do.$$

$\frac{\delta r}{\delta n}$ aber bezeichnet den Cosinus des Winkels, den die Richtung r mit der Normale δn bildet; folglich ist $\frac{\delta r}{\delta n} do$ gleich der Projection des Oberflächenelementes do auf eine Kugeloberfläche, welche mit dem Halbmesser r um den Pol gelegt wird, und zwar ist die Projection positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Normale δn mit dem Radiusvector der Kugel einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet.

Es mag hier genügen, den Fall zu betrachten, wo der Winkel spitz ist. Wir können dann setzen

$$\frac{\delta r}{\delta n}\, do = r^2 \sin\varphi\, d\varphi\, du$$

und erhalten

$$Z = -\frac{mj}{\sqrt{2}} \int\int \left(\frac{2 \sin\varphi \cos\varphi}{r} - \frac{\sin^2\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) d\varphi\, du,$$

wo die Grenzen des Doppelintegrales durch die Projection der umströmten Fläche auf die Kugelfläche r bestimmt werden. Die Grösse in der Klammer hat die Form eines Differentialquotienten nach φ,

$$\frac{2 \sin\varphi \cos\varphi}{r} - \frac{\sin^2\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \frac{\sin^2\varphi}{r}}{\partial \varphi};$$

folglich kann die Integration nach φ ausgeführt werden. Wir wollen setzen

$$r \sin\varphi = \varrho,$$

so dass ϱ die Projection des Radiusvectors auf die (x, y)-Ebene bedeutet, und die Grenzen von ϱ, r mit ϱ_1, r_1 und ϱ_{11}, r_{11} bezeichnen, welche Grenzen Functionen von u sind. Wir finden dann

$$Z = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\varrho_{11}^2}{r_{11}^3} - \frac{\varrho_1^2}{r_1^3} \right) du,$$

wofür wir auch schreiben können

$$Z = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{\varrho^2\, du}{r^3},$$

wenn wir das Integral über die ganze Grenze nehmen, d. h. über die gegebene Stromcurve. Nennen wir aber jetzt x, y, z eine Stelle des Stromes, dx, dy, dz die Projectionen des Stromelementes ds, so haben wir

$$\varrho^2 du = (x - \xi) dy - (y - \eta) dx,$$

(nach S. 121); denn $\varrho^2 du$ bedeutet die Projection der Elementarfläche (r, ds) auf die (x, y)-Ebene. Wir finden somit für Z den Werth

$$Z = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{(x-\xi) dy - (y-\eta) dx}{r^3}.$$

Dieser Werth stimmt aber genau mit demjenigen überein, den wir aus den Ausdrücken für die Determinanten A_s, B_s, C_s des geschlossenen Stromes an der Stelle ξ, η, ζ erhalten (Gl. VII, S. 121). Denn wir haben

$$C_s = \frac{1}{2} \int \frac{(\eta - y) dx - (\xi - x) dy}{r^3}$$

und (nach Gl. 4, S. 152)

$$Z = -j\, \alpha_1 \lambda_1 j_1\, C_s;$$

folglich, da

$$\mu = \frac{\alpha_1 \lambda_1 j_1}{\sqrt{2}},$$

$$Z = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{(\eta - y)dx - (\xi - x)dy}{r^3}.$$

§. 57.

Anwendung zur Berechnung der Wirkung, welche ein Spiralstrom auf einen Solenoidpol ausübt.

Der eben abgeleitete Ampèresche Satz nimmt unter Umständen eine scheinbar ganz verschiedene Gestalt an; wir wollen einen Fall dieser Art etwas näher betrachten, da derselbe praktisch wichtig ist.

Es sei ein System gleicher endlicher Ströme gegeben, welche eine cylindrische Spirale bilden; die Wirkung dieser Ströme kann, falls die Spirale eng genug gewunden ist, ersetzt werden durch die Wirkung von zwei getrennten einfachen magnetischen Flächen.

Wir fassen die Stromspirale als ein System von Kreisströmen auf, legen durch alle diese Kreise Ebenen, theilen in Elemente und lassen die letztern alle von Strömen der Intensität j umfliessen. Statt dessen können wir uns aber auch jede Kreisfläche auf beiden Seiten mit positivem und mit negativem magnetischem Fluidum belegt denken; wir erhalten so einen räumlichen Magnet, dessen Wirkung durch ein dreifaches Integral bestimmt wird. Doch kann eine der drei Integrationen sofort ausgeführt werden. Nehmen wir nämlich alle Elementarströme zusammen, welche von einer der Axe parallelen Geraden getroffen werden, so erhalten wir ein Solenoid, dessen Wirkung ersetzt wird durch die der magnetischen Flüssigkeiten $+\mu$ und $-\mu$ in den beiden Polen. Und zwar haben wir, wenn α die Anzahl der Umgänge bezeichnet, welche die Spirale auf die Längeneinheit macht, und λ den Flächeninhalt eines Elementes,

$$\mu = \frac{\alpha \lambda j}{\sqrt{2}}.$$

Mithin kann die Wirkung der cylindrischen Spirale vollständig ersetzt werden durch die Wirkung ihrer beiden Endflächen, wenn wir uns die eine mit positivem, die andere mit negativem magnetischem Fluidum von der Dichte

$$\frac{\alpha j}{\sqrt{2}}$$

belegt denken. Wir ersetzen also die Spirale durch zwei getrennte einfach magnetische ebene Flächen.

Wir können diesen Satz immer zur Anwendung bringen, sobald der Solenoidpol, auf welchen die Wirkung ausgeübt wird, ausserhalb der Spirale liegt. Allein in dem Falle, wo der Pol innerhalb der Spirale

liegt, führt die unmittelbare Anwendung des Satzes zu einem falschen Resultate; doch ist die Correction, welche in diesem Fall muss angebracht werden, leicht zu bestimmen.

Wie wir nachher sehen werden, genügt es den Fall zu betrachten, wo der Pol in der Axe der Spirale liegt und die Kraft in die Richtung der Axe fällt. Wir berechnen die Wirkung der magnetischen Endflächen auf einen solchen Pol, dann die Wirkung der Kreisströme und vergleichen die Resultate.

Wir lassen die z-Axe mit der Richtung der Cylinderaxe zusammenfallen und den Strom so fliessen, dass die obere Endfläche $z = c_2$ mit positivem, die untere Endfläche $z = c_1$ mit negativem magnetischem Fluidum belegt werde. Ist dann $c_2 > c_1$, so fliesst der Strom in negativem Sinne um die Z-Axe. Die Lage des Poles werde durch ζ bestimmt, und er sei ein Nordpol. Endlich sei der Halbmesser des Kreiscylinders gleich R.

Dann ist die Wirkung der magnetischen Endflächen auf den Pol μ gleich

$$Z_m = -\frac{\mu\alpha j}{\sqrt{2}}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{(c_2-\zeta)r\,dr\,d\varphi}{\{(c_2-\zeta)^2+r^2\}^{3/2}} + \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{(\zeta-c_1)r\,dr\,d\varphi}{\{(\zeta-c_1)^2+r^2\}^{3/2}}\right\}$$

oder

$$Z_m = \frac{2\pi\mu\alpha j}{\sqrt{2}}\left\{\frac{c_2-\zeta}{\sqrt{(c_2-\zeta)^2+R^2}} + \frac{\zeta-c_1}{\sqrt{(\zeta-c_1)^2+R^2}} - 2\right\}.$$

Zweitens berechnen wir direct die Wirkung der Kreisströme. Die Wirkung des Kreisstromes z auf den Pol ist gleich

$$\frac{\mu j}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{R\,d\varphi}{(z-\zeta)^2+R^2}\;\frac{R}{\sqrt{(z-\zeta)^2+R^2}},$$

wie aus der Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes unmittelbar folgt, also gleich

$$\frac{2\pi\mu j R^2}{\sqrt{2}\{(z-\zeta)^2+R^2\}^{3/2}}.$$

Wir multipliciren diesen Ausdruck mit $\alpha\,dz$ und integriren in Bezug auf z von c_1 bis c_2; so folgt die Wirkung des Spiralstromes

$$Z_s = \frac{2\pi\mu\alpha j}{\sqrt{2}}R^2\int_{c_1}^{c_2}\frac{dz}{\{(z-\zeta)^2+R^2\}^{3/2}}$$

oder

$$Z_s = \frac{2\pi\mu\alpha j}{\sqrt{2}}\left\{\frac{c_2-\zeta}{\sqrt{(c_2-\zeta)^2+R^2}} + \frac{\zeta-c_1}{\sqrt{(\zeta-c_1)^2+R^2}}\right\}.$$

Aus der Vergleichung der beiden Werthe ergiebt sich

$$Z_s = Z_m + \frac{4\pi\mu\alpha j}{\sqrt{2}},$$

oder, wenn wir die Dichtigkeit des magnetischen Fluidums, mit welchem wir die Endflächen belegt annehmen, m nennen,

$$Z_s = Z_m + 4\pi\mu m .$$

Die anzubringende Correction beträgt also

$$4\pi\mu m .$$

Dieses Resultat gilt ganz allgemein, wenn der Pol irgendwo im Innern der Spirale liegt, und wenn die Grundfläche des Cylinders von einer ganz beliebigen geschlossenen Curve begrenzt ist.

Denn einmal gilt der Satz von der Ersetzung des Spiralstromes durch die magnetischen Endflächen bezüglich der Wirkung auf einen äussern Punkt ganz allgemein, welche geschlossene Curve die Erzeugende des Cylinders auch sein mag. Liegt aber der Pol im Innern des Cylinders, so construiren wir einen Kreiscylinder, in dessen Axe der Pol liegt; der Halbmesser der Basis kann immer so klein genommen werden, dass der Kreiscylinder von dem gegebenen Cylinder vollständig umschlossen wird. Wir denken uns ferner den Kreiscylinder von zwei Stämmen entgegengesetzter Richtung in derselben Spirale umflossen. Wir haben dann die Wirkung des gegebenen Cylinders zerlegt in die Wirkung eines Hohlcylinders auf einen Punkt in dem Hohlraum, also auf einen äussern Punkt, und in die Wirkung des Kreiscylinders auf den in seiner Axe liegenden Pol. Die letztere Wirkung haben wir oben berechnet. Für die Wirkung des Hohlcylinders auf den äussern Punkt aber gilt das früher Bemerkte, sobald nur die innere Spirale ebensoviel Umgänge auf die Längeneinheit macht, wie die äussere, und durch beide Spiralen derselbe Strom in entgegengesetzter Richtung fliesst. Folglich ist die Wirkung des beliebigen Spiralstroms auf den äussern Pol gleich der Wirkung der magnetischen Endflächen; die Wirkung auf den innern Pol aber folgt aus der Wirkung der magnetischen Endflächen, indem wir an der Componente in der Richtung der Axe die oben bestimmte Correction $4\pi\mu m$ anbringen.

Uebrigens können wir, wenn der Pol im Innern der Spirale liegt, gleich von Anfang an die magnetischen Doppelflächen so legen, dass keine derselben durch den Pol geht. Wir können z. B. die Doppelflächen als unendliche Ebenen nehmen, innen begrenzt durch den geschlossenen Strom. Schliesslich bleiben dann die beiden unendlichen Ebenen, innen begrenzt von den Endflächen des Cylinders, welche die eine mit positivem und die andere mit negativem magnetischem Fluidum einfach belegt sind; die Dichtigkeit der Belegungen ist den früher gefundenen gleich, das Vorzeichen aber entgegengesetzt.

Wir wollen noch zeigen, dass wir in dem Falle einer Kreisspirale auf den beiden Wegen zu demselben Resultat gelangen. Die Wirkung

der beiden unendlichen magnetischen Flächen auf den Pol μ in der Cylinderaxe wird bestimmt durch das Integral

$$Z = \frac{\mu\alpha j}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_R^{\infty} \left\{ \frac{c_2 - \zeta}{\{(c_2-\zeta)^2 + r^2\}^{3/2}} + \frac{\zeta - c_1}{\{(\zeta - c_1)^2 + r^2\}^{3/2}} \right\} r\,dr\,d\varphi,$$

indem wir in dem Werthe von Z_m das Vorzeichen umkehren und die Grenzen R und ∞ in Bezug auf r setzen; folglich

$$Z = \frac{2\pi\mu\alpha j}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{c_2 - \zeta}{\sqrt{(c_2-\zeta)^2 + R^2}} + \frac{\zeta - c_1}{\sqrt{(\zeta - c_1)^2 + R^2}} \right\}.$$

Dies ist aber der für die Wirkung des Spiralstroms gefundene Werth Z_s.

§. 58.

Neue Form für die Componenten der Wirkung zwischen zwei geschlossenen Strömen.

Wir können den Ampèreschen Satz, welcher im Grunde ein reiner Integralsatz ist, auch anwenden, um die Wirkung von zwei geschlossenen Strömen auf einander zu berechnen. Wir legen durch die beiden Stromcurven zwei beliebige Oberflächen, theilen diese in Elemente und ersetzen die endlichen Ströme durch Elementarströme; für die letztern setzen wir weiter magnetische Molecüle und erhalten so eine Doppelbelegung für die beiden Oberflächen.

Es seien die Stromstärken j und j_1, die Elemente der Oberflächen do und $d\omega$, deren Normalen dn und $d\nu$, die Stellen (x, y, z) und (ξ, η, ζ), endlich

$$m = \frac{j}{\sqrt{2}\,dn}, \qquad \mu = \frac{j_1}{\sqrt{2}\,d\nu};$$

dann wird die Componente der Wirkung, welche das Element do auf das Element $d\omega$ ausübt, in der Richtung der x-Axe

$$m\mu \frac{\partial^2 \frac{x-\xi}{r^3}}{\partial n\,\partial \nu}\, dn\,d\nu\,do\,d\omega.$$

Demnach werden die Componenten der Wirkung, welche der geschlossene Strom s auf den andern geschlossenen Strom σ ausübt, dargestellt durch vierfache Integrale, deren weitere Behandlung oft einfacher ist, als die der direct zu bildenden Doppelintegrale. Jedoch muss sich die Reduction des vierfachen Integrales auf ein Doppelintegral rein analytisch bewerkstelligen lassen, in ähnlicher Weise, wie oben das Doppelintegral auf ein einfaches ist reducirt worden.

§. 59.

Einfacher Ausdruck für das Potential eines geschlossenen Stromes auf einen Solenoidpol.

Wir wollen endlich den Ampèreschen Satz noch benutzen, um einen sehr hübschen Ausdruck für das Potential eines geschlossenen Stromes in Bezug auf einen Solenoidpol abzuleiten.

Der letztere sei dargestellt durch das freie magnetische Fluidum μ an der Stelle ξ, η, ζ; die Stärke des Stromes sei j, ein Punkt der durch den Strom gelegten Oberfläche x, y, z, das Element do, die positive Normale dn. Dann ist die X-Componente der Wirkung, welche der Strom auf den Pol ausübt,

$$X = \frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial \frac{x-\xi}{r^3}}{\partial n} do,$$

oder

$$X = \frac{\mu j}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do.$$

Folglich wird das Potential der magnetischen Doppelfläche auf den Pol μ

$$P = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do.$$

Der Werth dieses Integrales aber hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Es ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n},$$

und $\frac{\partial r}{\partial n}$ bedeutet den Cosinus des Winkels, welchen die Richtung r von dem Pol nach der Oberfläche mit der positiven Normale der letzteren bildet; folglich ist

$$\frac{\partial r}{\partial n} do$$

die Projection des Oberflächenelementes auf eine mit dem Halbmesser r um den Pol gelegte Kugeloberfläche, also

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} do = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do = d\omega$$

die Projection des Oberflächenelementes auf eine Kugel, die wir mit dem Halbmesser 1 um den Pol legen. Mithin wird

$$P = \frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int d\omega,$$

und das Integral bedeutet die Oeffnung des Kegels, dessen Spitze im

Pol liegt, und dessen Kanten durch die gegebene Stromcurve gehen. Wir setzen

$$K = \int d\omega$$

und haben dann

$$P = \frac{\mu j}{\sqrt{2}} K.$$

Hiebei ist zu bemerken, dass die Oeffnung K positiv oder negativ muss gerechnet werden, je nachdem die positive Normale auf die umströmte Fläche mit der Richtung vom Pol nach der Fläche einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet. Folglich wird K positiv oder negativ, je nachdem vom Pol aus gesehen der Strom die Fläche in negativem oder in positivem Sinne umfliesst.

Wirkt z. B. ein Kreisstrom, so erhalten wir einen elliptischen Kegel, und das Potential wird durch den Flächeninhalt einer sphärischen Ellipse bestimmt.

IV. Kapitel.

Ueber die Ersetzung eines Magnets durch elektrische Ströme.

§. 60.

Allgemeiner Ausdruck für die Wirkung eines Magnets auf einen Solenoidpol.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen sind wir in den Stand gesetzt die theoretisch und praktisch wichtige Frage zu beantworten, ob und wie die Wirkung eines Magnets auf einen Solenoidpol zu ersetzen sei durch die Wirkung von endlichen geschlossenen Strömen. Wir können jeden Magnet als ein Aggregat von sehr vielen magnetischen Molecülen betrachten; jedes dieser Molecüle hat ein bestimmtes magnetisches Moment und eine bestimmte Axenrichtung; diese Elemente sind aus der Wirkung des Aggregates auf einen äussern Pol nicht zu bestimmen; sondern es muss auf die Magnetisirung Rücksicht genommen werden. Dieser Process ist in der Regel ein so verwickelter, dass wir die Untersuchung nicht durchführen können. Nehmen wir aber an, es sei die Anordnung der magnetischen Molecüle gegeben, so können wir jedes magnetische Molecül in Bezug auf seine Wirkung durch ein unendlich kurzes Solenoid ersetzen und so den endlichen Magnet auffassen als ein System von unendlich vielen unendlich kleinen Strömen. Eine solche Ersetzung des Magnets durch Ströme suchen wir jetzt nicht. Vielmehr wollen wir ein System von endlichen geschlossenen Strömen suchen, welches in jedem äussern Punkt dieselbe Wirkung ausüben soll, wie der gegebene Magnet, etwa ein System von Strömen, welche auf der Oberfläche des Magnets fliessen, oder endliche geschlossene Ströme im Innern des Magnets. Wir werden finden, dass, welches auch die Lage und die Axenrichtung der Molecüle im Magnet sein mag, dieselbe Wirkung von endlichen Strömen im Innern und an der Oberfläche des Magnets ausgehen kann, dass aber nur in ganz besondern Fällen alle diese Ströme auf der Oberfläche des Magnets liegen.

Zunächst müssen wir einen ganz allgemeinen Ausdruck für die Wirkung eines Magnets auf einen Solenoidpol ableiten.

Der Magnet habe ganz beliebige Form; ein Molecül mit den Polen $\pm m$ befinde sich an der Stelle x, y, z, und seine Axe habe die

Richtung δn. Wir suchen die Wirkung auf den Pol μ an der Stelle ξ, η, ζ und berechnen hiezu das Potential.

Nun ist das Potential der Masse $+ m$ auf die Masse μ gleich

$$\frac{\mu m}{r},$$

wenn

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

und wir finden daraus das Potential des Südpoles $- m$, indem wir das Vorzeichen umkehren und in der Richtung der positiven Axe weiter gehen um die Strecke $- \delta n$. Bezeichnen wir zur Unterscheidung Differentiationen nach dieser Richtung mit dem Buchstaben δ, so ergiebt sich

$$- \mu m \left\{ \frac{1}{r} - \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta n} \right) \delta n \right\},$$

und das Potential des magnetischen Molecüles $\pm m$ auf den Pol μ wird gleich

$$U = \mu m \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta n} \right\} \delta n.$$

Das Potential des ganzen Magnets ist gleich der Summe von den Potentialen aller Molecüle, und wir müssen nun an die Stelle dieser Summe ein Integral setzen.

Zu diesem Ende betrachten wir ein Raumelement dv an der Stelle x, y, z. Die Raumeinheit enthalte, wenn sie mit magnetischen Molecülen ebenso erfüllt ist, wie das Raumelement dv, die Anzahl A magnetischer Molecüle; dann enthält das Raumelement deren

$$A dv.$$

Allen diesen Molecülen können wir dieselben Mengen magnetischer Flüssigkeit und dieselbe Axenrichtung zuschreiben. Demnach wird der Theil des Potentials, welcher von den in dem Element enthaltenen Molecülen herrührt, durch den Ausdruck dargestellt

$$\mu \, . \, A dv \, . \, m \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta n} \right\} \delta n,$$

den wir das Potential des magnetischen Elements dv auf den Pol μ nennen. Dann bezeichnet

$$Am \delta n dv$$

das magnetische Hauptmoment des Elements, und die magnetischen Momente nach den drei Axen sind

$$Am \delta n dv \cos(n, x) = Am \delta n dv \frac{\delta x}{\delta n},$$

u. s. w.

Bezeichnen wir diese drei Momente mit

$$a\,dv, \quad b\,dv, \quad c\,dv,$$

so wird das Potential des Elementes

$$\mu\left\{a\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+b\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right\}dv.$$

Hierin bedeuten a, b, c die magnetischen Momente an der Stelle (x, y, z), bezogen auf die Raumeinheit; es sind dies die Werthe der magnetischen Momente, die sich ergeben, wenn die Raumeinheit ebenso von magnetischen Molecülen erfüllt angenommen wird, wie die Umgebung der Stelle (x, y, z).

Durch Integration über alle Raumelemente dv folgt das Potential des endlichen Magnets

$$V=\mu\int\left(a\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+b\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dv,$$

wo a, b, c beliebig gegebene Functionen der Stelle bedeuten.

Aus der Form dieses Ausdruckes folgt, dass wir an die Stelle eines Magnets immer drei magnetische Systeme setzen können, wo in jedem einzelnen System die Axenrichtung sämmtlicher Molecüle dieselbe ist. Diese drei magnetischen Zustände werden bestimmt durch die Werthe

$$\begin{array}{lll} a, & b=0, & c=0;\\ a=0, & b, & c=0;\\ a=0, & b=0, & c. \end{array}$$

Die Summe der drei Potentiale ist dem gegebenen gleich, und das zweite und dritte System folgen aus dem ersten durch Vertauschung der Buchstaben.

§. 61.

Fall, wo die magnetischen Momente nach den drei Axen bloss Functionen der betreffenden Ordinate sind.

Wir brauchen demnach bloss den ersten Zustand, wo b und c null sind, in Bezug auf die Ersetzung durch endliche Ströme weiter zu untersuchen, und wir wollen vorerst noch die besondere Voraussetzung machen, dass a nur Function von x sei. Wir haben dann einen sehr einfachen magnetischen Zustand vor uns: Die Axen sämmtlicher Molecüle sind parallel der x-Axe, und in jedem ebenen Schnitt senkrecht auf die x-Axe die magnetischen Momente der Molecüle gleich gross. Schneiden wir also durch die Ebenen x und $x+dx$ eine unendlich dünne Platte aus dem Magnet, so können wir uns dieselbe oben und unten gleichmässig mit magnetischer Flüssigkeit belegt denken,

und dann diese magnetische Doppelfläche ersetzen durch einen elektrischen Strom in ihrer Grenzcurve. Wir finden auch leicht die Stromstärke. Denn es ist adv oder $adx\,dy\,dz$ das magnetische Moment eines Elementes, folglich

$$adx = \frac{j}{\sqrt{2}},$$

also

$$j = \sqrt{2}\, a\, dx.$$

Der Strom fliesst in negativem oder in positivem Sinne um die x-Axe, je nachdem a positiv oder negativ ist. Nehmen wir solche Ströme in der Oberfläche des Magnets an, so üben dieselben auf den Pol μ genau dieselbe Wirkung aus, wie der Magnet selbst.

Man kann dies auch a posteriori nachweisen. Wir nennen die Componenten der Kraft, welche die Ströme auf den Pol μ ausüben, X_s, Y_s, Z_s, dagegen die Componenten der Kraft, welche der Magnet ausübt, X_m, Y_m, Z_m, und zeigen, dass diese Werthe einander gleich sind.

Die Componenten der Kraft, welche ein einzelner Strom auf den Pol ausübt, werden nach S. 152 bestimmt durch die Werthe der Determinanten, und zwar

$$X_s' = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{(y-\eta)\,dz - (z-\zeta)\,dy}{r^3},$$

$$Y_s' = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{(z-\zeta)\,dx - (x-\xi)\,dz}{r^3},$$

$$Z_s' = -\frac{\mu j}{\sqrt{2}} \int \frac{(x-\xi)\,dy - (y-\eta)\,dx}{r^3},$$

worin x, y, z eine Stelle des Stromes und dx, dy, dz die Projectionen des Stromelementes bedeuten. Nun ist in unserm Falle $dx = 0$; wir haben ferner

$$\frac{x-\xi}{r^3} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \text{u. s. w.;}$$

endlich ist

$$j = \sqrt{2}\, a\, dx.$$

Folglich haben wir

$$X_s' = \mu a\, dx \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dz - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dy \right),$$

$$Y_s' = -\mu a\, dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dz,$$

$$Z_s' = \mu a\, dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dy,$$

worin dx die Dicke der Schicht bedeutet; die Integrale sind zu nehmen über die Schnittcurve der Ebene x mit der Oberfläche des Magnets,

und zwar haben wir in negativem Sinne um die positive Richtung x herumzugehen. Führen wir also die Normale n auf die Oberfläche des Magnets und das Stromelement ds ein, so wird

$$dy = \frac{\cos(n,z)\,ds}{\sin(n,x)}, \qquad dz = -\frac{\cos(n,y)\,ds}{\sin(n,x)},$$

und wir erhalten

$$X_s' = -\mu a\,dx \int \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,z) \right\} \frac{ds}{\sin(n,x)},$$

$$Y_s' = \mu a\,dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\cos(n,y)}{\sin(n,x)}\,ds,$$

$$Z_s' = \mu a\,dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\cos(n,z)}{\sin(n,x)}\,ds.$$

Durch Integration in Bezug auf x folgen die Werthe von X_s, Y_s, Z_s. Nun ist aber

$$\frac{dx\,ds}{\sin(n,x)} = do$$

das Element der Oberfläche. Wir finden demnach

$$X_s = -\mu \int a \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,z) \right\} do,$$

$$Y_s = \mu \int a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,y)\,do,$$

$$Z_s = \mu \int a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,z)\,do,$$

wo die Integrale über die ganze Oberfläche des Magnets zu nehmen sind.

Andrerseits haben wir

$$X_m = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad Y_m = -\frac{\partial V}{\partial \eta}, \qquad Z_m = -\frac{\partial V}{\partial}$$

und

$$V = \mu \int a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dv;$$

folglich, wenn wir die Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ nach ξ, η, ζ durch solche nach x, y, z ausdrücken,

$$X_m = \mu \int a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\,dv,$$

$$Y_m = \mu \int a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}\,dv,$$

$$Z_m = \mu \int a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} dv.$$

Die beiden letzten Integrale formen wir in bekannter Weise durch Integration nach y und nach z um und erhalten so für Y_m und Z_m die Werthe

$$Y_m = \mu \int a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, y)\, do,$$

$$Z_m = \mu \int a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, z)\, do.$$

Dies sind aber die Werthe Y_s und Z_s.

Um das erste Integral in ähnlicher Weise umzuformen, setzen wir

$$\text{für } \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \text{ seinen Werth } -\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)$$

und integriren dann das erste Glied nach y, das zweite nach z; so folgt

$$X_m = -\mu \int\int\int a \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= -\mu \int a \left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(n, z)\right\} do,$$

und dies ist der für X_s berechnete Werth.

§. 62.

Behandlung des allgemeinen Falls.

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung des allgemeinen Falles, wo a Function von x, y, z ist.

Wir schneiden aus dem Magnet eine unendlich dünne Platte aus durch die Ebenen

$$x = x_0 \quad \text{und} \quad x = x_0 + dx;$$

die Curve, in welcher die Ebene x_0 die Oberfläche des Magnets schneidet, heisse die Grenzcurve des Schnitts; sie ist nothwendig geschlossen, da der Magnet endlich sein soll, und wir nehmen der Einfachheit wegen an, sie bestehe aus einem zusammenhangenden Stück*). Ferner werde

$$a = a_0 \quad \text{für} \quad x = x_0;$$

*) Durch Zerlegung des Magnets in mehrere Stücke und Betrachtung des einzelnen Stücks lässt sich der angenommene Fall immer herstellen, und auf demselben Wege ergiebt sich, dass auch die im Folgenden der einfacheren Rechnung wegen gemachten Voraussetzungen die allgemeine Giltigkeit des Resultates nicht beeinträchtigen.

a_0 ist jetzt nicht mehr constant, sondern eine Function der Stelle (y, z) in dem Schnitt. Wir wollen uns die Werthe von a_0 durch die Ordinaten einer Oberfläche dargestellt denken, die wir über dem Schnitt construiren, und annehmen, der magnetische Zustand a_0 des Schnitts sei durch Schichtung entstanden.

Zu diesem Ende betrachten wir den Raum, welcher begrenzt wird von der eben construirten Oberfläche, von einer Ebene, die wir senkrecht auf die x-Axe durch den tiefsten Punkt der Oberfläche legen, und von dem geraden Cylinder, dessen Basis der Schnitt x_0 bildet. Diesen Raum zerlegen wir durch Ebenen, die auf der x-Axe senkrecht stehen, in unendlich viele unendlich dünne Schichten, eine jede von der Dicke dm. Der Einfachheit wegen denken wir uns jede dieser Schichten aus einem zusammenhangenden Stücke bestehend und von einer geschlossenen Curve begrenzt; damit wird vorausgesetzt, dass die tiefste Stelle der Oberfläche auf der Cylinderfläche liege, d. h. der kleinste Werth von a_0 in der Grenzcurve des Schnittes x_0. Der magnetische Zustand, welchen eine solche Schicht darstellt, wird nach dem Frühern ersetzt durch einen Strom, der in der Grenze der Schicht fliesst, von der Stärke

$$dj = \sqrt{2}\, dm\, dx.$$

Wir erhalten ferner den magnetischen Zustand des Schnittes x_0, indem wir uns erstens eine Schicht endlicher Dicke m, wo m den kleinsten Werth von a_0 bedeutet, über den ganzen Schnitt ausgebreitet denken, und dann all die unendlich dünnen Schichten, welche den Schnitt nur zum Theil bedecken, darauf gelagert. Ersetzen wir diese magnetischen Schichten sämmtlich durch Ströme, so haben wir zunächst in der Grenzcurve des Schnitts einen Strom von der Stärke

$$j = \sqrt{2}\, m\, dx,$$

und dann in all den Grenzcurven der unendlich dünnen Schichten Ströme von der Stärke

$$dj = \sqrt{2}\, dm\, dx.$$

Und zwar sind die Stromstärken immer positiv gerechnet, wenn die Ströme in negativem Sinne um die positive x-Axe fliessen. Alle diese Stromcurven liegen in der Ebene x_0, und bloss der erste Strom j fliesst ganz in der Oberfläche des Magnets; die andern Ströme können nur zum Theil in diese Oberfläche fallen; zum Theil müssen sie im Innern des Magnets verlaufen, und ihre Bahnen werden dann durch die Gleichungen $a_0 =$ const. bestimmt.

Wir müssen nun die Wirkungen aller dieser Ströme berechnen. Die Wirkung des Stroms, welcher in der Grenzcurve des Schnittes fliesst, hat nach S. 169 die Componenten:

$$\overline{X_s'} = \mu m dx \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dz - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy \right),$$

$$Y_s' = -\mu m dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dz,$$

$$\overline{Z_s'} = \mu m dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dy,$$

die Integrale genommen über alle Elemente des geschlossenen Stromes. Dagegen sind die Componenten der Wirkung, welche einer der innern Ströme ausübt,

$$X_s' = \mu dm dx \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dz - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy \right),$$

$$Y_s' = -\mu dm dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dz,$$

$$Z_s' = \mu dm dx \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dy.$$

Diese Integrale sind über alle Elemente einer Curve

$$a_0 = \text{const.}$$

zu nehmen, und wenn dies keine geschlossene Curve im Innern der Grenzcurve liefert, noch über einen Theil dieser Grenzcurve. Um die Componenten der Gesammtwirkung zu erhalten, müssen wir alle innern Ströme des Querschnittes x_0 zu dem in der Grenzcurve fliessenden hinzunehmen, und dann über alle Schnitte in Bezug auf x integriren.

Hiezu berechnen wir erstlich die Componenten der Wirkung, welche von einem Element ds der Grenzcurve ausgeht. In diesem Element fliesst einmal der Strom j; ferner aber gehört das Element N innern Strömen an, wo N dadurch bestimmt wird, dass

$$a_0 - m = N dm;$$

folglich entspricht die Stromstärke in dem Element ds dem magnetischen Momente

$$m + a_0 - m = a_0,$$

und die Componenten der Wirkung, welche von diesem Element ausgeht, sind

$$X_s'' = \mu a_0 dx \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dz - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy \right),$$

$$\overline{Y_s''} = -\mu a_0 dx \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dz,$$

$$\overline{Z_s''} = \mu a_0 dx \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dy.$$

Führen wir das Element ds der Grenzcurve ein, und nehmen wir die Doppelintegrale über alle Elemente ds der Grenzcurve und über alle Schnitte dx, so erhalten wir die Componenten der Wirkung, welche von den in der Oberfläche des Magnets fliessenden Strömen ausgeübt wird:

$$\overline{X_s} = \mu \int\int \overline{a} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds\, dx,$$

$$\overline{Y_s} = -\mu \int\int \overline{a} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} ds\, dx,$$

$$\overline{Z_s} = \mu \int\int \overline{a} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} ds\, dx,$$

wo $\overline{a}$ bedeuten soll, dass der Werth einer Stelle an der Oberfläche des Magnets entspricht.

Wir bilden zweitens die Componenten der Wirkung, welche von den sämmtlichen Stromelementen, die im Innern des Magnets liegen, ausgeübt wird. Ein Element ds in der Ebene x auf der Curve $a =$ const. übt eine Wirkung aus, deren Componenten sind

$$X_s'' = \mu\, dm\, dx \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds,$$

$$Y_s'' = -\mu\, dm\, dx \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} ds,$$

$$Z_s'' = \mu\, dm\, dx \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} ds,$$

und wir haben die dreifachen Integrale zu nehmen über alle Elemente der Curve $a =$ const., soweit diese Curve im Innern des Magnets liegt, dann über alle solchen Curvenstücke in dem Querschnitt x, endlich über alle Schnitte von der Dicke dx. Diese dreifachen Integrale bringen wir auf eine andere Form.

Wir betrachten eine bestimmte Curve

$$a = a_1$$

des Querschnittes x. Die nächst gelegene Curve ist dann

$$a = a_1 + dm,$$

wo dm einen positiven Werth hat. Ferner liegt die Richtung der Normale, von der erstern Curve nach der letztern genommen, so zu der Richtung des Stromes, wie die y-Axe zur z-Axe; dies folgt aus den

oben gemachten Annahmen. Bezeichnen wir also den Abstand der beiden Curven an der Stelle y, z mit $\delta\varepsilon$, die Projectionen dieser Strecke mit δy, δz, so haben wir

$$\delta y = \frac{\partial z}{\partial s}\,\delta\varepsilon, \quad \delta z = -\frac{\partial y}{\partial s}\,\delta\varepsilon;$$

folglich ist

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\delta y}{\delta\varepsilon} = \frac{\frac{\partial a}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\delta z}{\delta\varepsilon} = \frac{-\frac{\partial a}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2}},$$

wo die positive Wurzel muss genommen werden; endlich haben wir

$$dm = \frac{\partial a}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial a}{\partial z}\,\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2}\,\delta\varepsilon.$$

Führen wir diese Werthe ein, so folgt

$$X_s'' = \mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right) ds\,\delta\varepsilon\,dx,$$

$$Y_s'' = -\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\,ds\,\delta\varepsilon\,dx,$$

$$Z_s'' = -\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial z}\,ds\,\delta\varepsilon\,dx.$$

Hierin bedeutet aber $ds\,\delta\varepsilon$ ein Element der Schnittebene x und $ds\,\delta\varepsilon\,dx$ das Raumelement; dafür schreiben wir

$$dx\,dy\,dz$$

und erhalten so für die Componenten der Wirkung, welche die sämmtlichen im Innern des Magnets liegenden Stromelemente ausüben, die folgenden Werthe:

$$X_s = \mu\iiint\left(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

$$Y_s = -\mu\iiint\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z_s = -\mu\iiint\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Führen wir endlich noch das Element do der Oberfläche ein und seine Normale n, nach Aussen positiv gerechnet, so haben wir an der Oberfläche

$$ds\,dx = \cos(n, \nu)\,do,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \cos(\nu, z), \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = -\cos(\nu, y),$$

wo ν die Normale an die Grenzcurve in der Schnittebene x bezeichnet, hier nach Aussen positiv gerechnet; ferner ist

$$\cos(n, y) = \cos(n, \nu)\cos(\nu, y),$$
$$\cos(n, z) = \cos(n, \nu)\cos(\nu, z);$$

folglich können wir die Doppelintegrale schreiben

$$\overline{X}_s = -\mu \int \overline{a} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(n, z) \right\} do,$$

$$\overline{Y}_s = \mu \int \overline{a} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, y)\,do,$$

$$\overline{Z}_s = \mu \int \overline{a} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, z)\,do,$$

und diese Integrale sind dann über alle Elemente do der Oberfläche zu nehmen.

Wir hätten diese Ausdrücke auch durch rein analytische Umformung der dreifachen Integrale erhalten, welche die Componenten der magnetischen Wirkung in dem vorliegenden Fall bestimmen:

$$X_m = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad Y_m = -\frac{\partial V}{\partial \eta}, \qquad Z_m = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

oder

$$V = \mu \iiint a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Wir können die Werthe schreiben:

$$X_m = \mu \iiint a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y_m = \mu \iiint a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z_m = \mu \iiint a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\,dx\,dy\,dz;$$

in dem ersten dieser Integrale setzen wir

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right),$$

und dann integriren wir partiell nach y und partiell nach z. So finden wir in bekannter Weise

$$X_m = -\mu\int \bar{a}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,z)\right\}do$$
$$+\mu\int\int\int\left(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$Y_m = \mu\int \bar{a}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,y)do-\mu\int\int\int\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z_m = \mu\int \bar{a}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,z)do-\mu\int\int\int\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Wir gelangen auf diesem Wege sehr einfach zu den Formeln

$$X_m = \bar{X}_s + X_s, \qquad Y_m = \bar{Y}_s + Y_s, \qquad Z_m = \bar{Z}_s + Z_s,$$

gewinnen aber keinen Einblick in die physikalische Bedeutung der Umformung.

Wir bilden nun die Ausdrücke für die Componenten der Wirkung, wenn die Grössen b und c von Null verschieden und die drei Grössen a, b, c beliebige Functionen der Stelle x, y, z im Innern des Magnets sind. Wir erhalten so für die Componenten der Wirkung, welche die sämmtlichen innern Ströme ausüben,

$$(1)\quad X = \mu\int\int\int\left\{\left(\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right\}dx\,dy\,dz,$$

u. s. w.,

ferner für die Componenten der Wirkung, welche die sämmtlichen in der Oberfläche fliessenden Ströme ausüben,

$$(2)\quad X = -\mu\int\left\{\begin{array}{l}\{\bar{a}\cos(n,y)-\bar{b}\cos(n,x)\}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\\ +\{\bar{a}\cos(n,z)-\bar{c}\cos(n,x)\}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\end{array}\right\}do,$$

u. s. w.

Die dreifachen Integrale sind über alle Raumelemente $dx\,dy\,dz$, die Doppelintegrale über alle Oberflächenelemente do des Magnets auszudehnen.

Wir vergleichen erstens die Ausdrücke unter den dreifachen Integralen mit den Componenten der Wirkung, welche ein Stromelement $j'ds$ an der Stelle x, y, z ausübt. Die X-Componente dieser Wirkung ist, wenn j die Richtung des Stromes bedeutet,

$$X' = -\frac{\mu j'}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dy - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}dz\right)$$

$$= -\frac{\mu j'}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(j,y) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(j,z)\right\}ds.$$

Vergleichen wir diesen Werth mit dem Ausdruck unter dem Raumintegral X, so folgt

$$\frac{j'}{\sqrt{2}}\cos(j,z)\,ds = \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$\frac{j'}{\sqrt{2}}\cos(j,y)\,ds = \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Beziehen wir aber den Strom auf die Einheit des Querschnittes, indem wir nun voraussetzen, dass die Ströme nicht in einzelnen Linien im Innern des Magnets fliessen, sondern in dem ganzen Raum, den der Magnet einnimmt, so haben wir statt j' zu setzen $j\,dq$, wo dq den Querschnitt bezeichnet. Dann wird $dq\,ds$ einem Elemente des Raumes gleich, und diesem Element müssen wir das andere $dx\,dy\,dz$ gleich nehmen. Wir finden dann für die Strömung j an der Stelle x, y, z im Innern des Magnets die folgenden drei Gleichungen, indem die Betrachtung der Y- und Z-Componenten noch eine weitere Relation liefert,

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{j}{\sqrt{2}}\cos(j,x) = \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}, \\ \frac{j}{\sqrt{2}}\cos(j,y) = \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}, \\ \frac{j}{\sqrt{2}}\cos(j,z) = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}. \end{cases}$$

Die Stärke und die Richtung der Strömung im Innern werden also durch die partiellen Differentialquotienten der magnetischen Momente a, b, c bestimmt.

Einer ähnlichen Betrachtung unterwerfen wir auch die Strömung in der Oberfläche. Das Stromelement $j_0'ds$ falle in die Oberfläche, die Componenten seiner Wirkung sind

$$\bar{X}' = -\frac{\mu j_0'}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dy - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}dz\right),$$

u. s. w.

und aus der Vergleichung mit den Grössen unter den Doppelintegralen $\bar{X}$ u. s. w. ergiebt sich

$$\frac{j_0'}{\sqrt{2}}dy = \{a\cos(n,z) - \bar{c}\cos(n,x)\}\,do,$$

u. s. w.

Wir setzen ferner

$$dy = \cos(j_0,y)\,ds,$$

und denken uns jetzt statt der Ströme, die in einzelnen Linien auf der Oberfläche fliessen, eine Strömung in der Fläche selbst. Wir haben dann

$$j_0' = j_0 \, ds_1$$

zu setzen, wo ds_1 den Abstand der früher angenommenen Stromcurven bezeichnet; j_0 ist die Stromstärke, bezogen auf die Einheit der Breite, und $ds\, ds_1$ ein Oberflächenelement; diesem muss das mit do bezeichnete gleich genommen werden; folglich wird die Strömung in der Oberfläche durch die folgenden drei Gleichungen bestimmt:

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{j_0}{\sqrt{2}} \cos(j_0, x) = \bar{c} \cos(n, y) - \bar{b} \cos(nz), \\ \frac{j_0}{\sqrt{2}} \cos(j_0, y) = \bar{a} \cos(n, z) - \bar{c} \cos(n, x), \\ \frac{j_0}{\sqrt{2}} \cos(j_0, z) = \bar{b} \cos(n, x) - \bar{a} \cos(n, z). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dass die Strömung senkrecht auf die Normale an die Oberfläche und senkrecht auf die Richtung des magnetischen Hauptmomentes, die Resultante der Componenten $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, stattfindet; wir haben ferner, wenn wir dieses Hauptmoment mit $\bar{m}$ bezeichnen,

$$\frac{j_0}{\sqrt{2}} = \bar{m} \sin(\bar{m}, n).$$

Was den Sinn betrifft, steht die positive Richtung der Strömung zu den Richtungen n und $\bar{m}$, wie die Richtung x zu den Richtungen y und z.

§. 63.

Allgemeine Folgerungen. Ersetzung eines elektrodynamischen Zustandes durch einen magnetischen.

Wir knüpfen an die Formeln (3) und (4) einige allgemeine wichtige Bemerkungen.

Aus den Gleichungen (3) folgt sofort, dass wir den magnetischen Zustand durch eine Strömung in der Oberfläche ersetzen können, sobald der Ausdruck

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

das vollständige Differential einer Function φ von (x, y, z) ist; denn die Bedingungen hiefür sind

$$\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

also

$$j = 0.$$

Diese Forderung wird immer erfüllt, wenn der magnetische Zustand durch äussere magnetische Kräfte hervorgerufen ist, deren Wirkung

durch ein Potential dargestellt wird, d. h. wenn weiches Eisen durch einen Magnet oder durch geschlossene elektrische Ströme magnetisirt wird; es gilt auch von diamagnetischen Zuständen.

Man wird so zu der Frage geführt, ob überhaupt magnetische Zustände möglich seien, bei denen die Bedingung nicht erfüllt wäre. Aber diese Frage ist bis jetzt unbeantwortet geblieben; das gewöhnliche Verfahren zur Magnetisirung ist ausserordentlich complicirt und kann mit der Rechnung nicht verfolgt werden.

Unter gewissen Umständen können alle Ströme in der Oberfläche verschwinden; dies geschieht, wenn die magnetischen Momente an allen Stellen der Oberfläche null sind, oder wenn die Richtung des magnetischen Hauptmoments an der Oberfläche immer mit der Normale zusammenfällt. Sogar ein magnetischer Zustand, wo sämmtliche Ströme verschwinden, ist denkbar; wir haben dann einen Magnet, der keine Wirkung nach Aussen ausübt.

Die Formeln (3) und (4) sind praktisch recht brauchbar. Es ist oft bequemer die Ausdrücke für die Wirkung von Strömen statt der Ausdrücke für die magnetischen Kräfte anzuwenden. Aber auch das Umgekehrte kann vortheilhaft sein, und wir wollen hiervon ein einfaches Beispiel betrachten. Wir schicken voraus, dass das Problem unendlich viele Lösungen zulässt; denn wir haben ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, dessen allgemeine Lösungen willkührliche Functionen enthalten; diese letztern können aber durch die Bedingungen an der Oberfläche nicht vollständig bestimmt werden. Die Unbestimmtheit steht im Zusammenhang mit der Willkührlichkeit der magnetischen Doppelfläche, durch welche wir einen geschlossenen Strom in Bezug auf seine Wirkung nach Aussen ersetzen können.

§. 64.

Anwendung auf den Fall eines Rotationsellipsoids.

Wir nehmen den folgenden Fall an:
Ein Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2 + z^2}{B^2} = 1$$

sei von Strömen erfüllt, deren Ebenen sämmtlich auf der Rotationsaxe senkrecht stehen. Wir legen sehr viele Schnitte in gleichen Abständen senkrecht auf die Axe; alle diese Schnitte seien von einem spiralförmigen Strom gleicher Stärke gleichmässig erfüllt, so dass gleiche Strecken einer Geraden, die wir in einem der Schnitte durch den Mittelpunkt desselben legen, von dem Strome gleich oft geschnitten werden; die Spiralen seien endlich so eng, dass wir statt jedes Spiralstroms ein System von concentrischen, gleich weit von einander ab-

stehenden Kreisströmen annehmen können. Wir suchen den magnetischen Zustand, welcher diese Ströme in Bezug auf ihre elektrodynamische Wirkung ersetzt.

Da in der Oberfläche des Ellipsoids nach der Annahme keine Ströme fliessen, ist j_0 gleich 0 zu setzen, und die Gleichungen werden folgende:

$$\frac{j}{\sqrt{2}}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y},$$

$$\frac{j}{\sqrt{2}}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z},$$

$$\frac{j}{\sqrt{2}}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}$$

für jede Stelle x, y, z im Innern des Rotationsellipsoides, und

$$\bar{m}\sin(\bar{m}, n) = 0$$

als Bedingung an der Oberfläche, wo

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

ds bezeichnet die Richtung der Strömung j in dem Punkte x, y, z; die Strömung j aber ist zu beziehen auf die Einheit des Querschnittes. Nehmen wir also an, es kommen N_1 Spiralströme auf die Einheit der Rotationsaxe, und es werde die Einheit der Länge auf der y- oder z-Axe von einem Spiralstrom der Stärke $J N_2$ mal geschnitten, so müssen wir setzen

$$j = N_1 N_2 J.$$

Wir haben endlich, da die Ströme auf der x-Axe senkrecht stehen,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$

und da wir dieselben als Kreisströme um die Axe auffassen können,

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

die Ströme fliessen dann in positivem Sinne um die x-Axe. Hienach nehmen die Differentialgleichungen die folgende Form an:

$$\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{N_1 N_2 J}{\sqrt{2}}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{N_1 N_2 J}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

Diese Gleichungen sind so einfach, dass die allgemeine Lösung derselben nicht unmöglich erscheint. Wir wollen jedoch hier nur eine ganz particuläre Lösung aufsuchen, indem wir

$$b = 0 \quad \text{und} \quad c = 0$$

annehmen. Der Bedingung an der Oberfläche wird dann durch

$$\overline{a} = 0$$

genügt; es folgt ferner für a die Gleichung

$$\frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz = \frac{N_1 N_2 J}{\sqrt{2}} \frac{y\,dy + z\,dz}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Die Integration giebt

$$a = \frac{N_1 N_2 J}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 + z^2} + f(x),$$

und die Function $f(x)$ wird durch die Bedingung an der Oberfläche bestimmt,

$$f(x) = -\frac{N_1 N_2 J}{\sqrt{2}} \sqrt{B^2 - \frac{B^2 x^2}{A^2}}.$$

Wir erhalten demnach

$$a = \frac{N_1 N_2 J}{\sqrt{2}} \left\{\sqrt{y^2 + z^2} - \sqrt{B^2 - \frac{B^2 x^2}{A^2}}\right\}.$$

Folglich wird das magnetische Potential des von Strömen erfüllten Rotationsellipsoides

$$V = \frac{N_1 N_2 J}{\sqrt{2}} \int\int\int \left\{\sqrt{y^2 + z^2} - \sqrt{B^2 - \frac{B^2 x^2}{A^2}}\right\} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

Die negativen partiellen Differentialquotienten von V nach ξ, η, ζ geben die Componenten der Kraft, welche auf die magnetische Masse 1 an der Stelle ξ, η, ζ ausgeübt wird.

Jedenfalls lassen sich noch manche andere particuläre Lösungen a, b, c ermitteln; sie müssen alle zu demselben Ausdruck V führen.

V. Kapitel.

Ueber die Herstellung eines Raumes von constanter elektrodynamischer Kraft.

§. 65.

Die Aufgabe und ihre praktische Bedeutung.

Wir machen eine praktisch sehr wichtige Anwendung der Ampèreschen Gesetze, indem wir einen Raum herstellen, innerhalb dessen die elektrodynamische Kraft constant ist. Wir brauchen eigentlich schon für die Tangentenboussole einen solchen Raum; der zu messende elektrische Strom soll eine Kraft von constanter Richtung und Grösse in dem Raum ausüben, in welchem die Nadel sich bewegt. Namentlich aber ist ein solcher Raum erforderlich, wenn wir den magnetischen Zustand untersuchen wollen, der durch elektrische Ströme hervorgerufen wird; um den Hergang mit der Rechnung verfolgen zu können, muss die Annahme gemacht werden, dass die wirkende Kraft in dem magnetisirten Raum überall ihrer Grösse und Richtung nach constant sei. Ebendasselbe gilt von der Untersuchung der diamagnetischen Körper.

Wir haben es hier nur mit Wirkungen geschlossener Ströme zu thun; diese Wirkungen sind aber immer mittelst eines Potentiales bestimmbar, so dass wir die folgende Bedingung stellen:

Es soll ein Stromsystem so aufgestellt werden, dass das Potential desselben in einem gegebenen bestimmten Raum eine lineare Function von den Coordinaten der Stelle sei.

Die Grundlage der folgenden Untersuchung bildet die Betrachtung einer von einem Strom durchflossenen Drahtrolle; wir haben das Potential einer solchen Rolle für eine Stelle des gegebenen Raumes zu berechnen. Die Coordinaten der Stelle seien x, y, z, das Potential der Drahtrolle V. Befindet sich dann an der Stelle die magnetische Flüssigkeit μ, so sind die Componenten der auf μ ausgeübten Kraft den Differentialquotienten von μV nach x, y, z entgegengesetzt gleich; haben wir aber in dem Raum einen endlichen Magnet, so ist die Summe von μV über die sämmtlichen Theile des Magnets zu nehmen. Suchen wir endlich die Wirkung auf einen geschlossenen Strom von der Stärke J, so legen wir eine Oberfläche durch die Strombahn; das Element

dieser Oberfläche werde mit do, die Normale mit dn bezeichnet; dann wird das Potential gleich

$$-\frac{J}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial V}{\partial n}\,do,$$

wo das Integral über den von der Strombahn begrenzten Theil der Oberfläche zu nehmen ist.

§. 66.

Potential eines Kreisstromes.

Die Drahtrolle ist ein Aggregat von Kreisströmen; wir berechnen daher zunächst das Potential eines Kreisstroms.

Der Halbmesser des Kreises sei R, die Stromstärke j. Wir legen durch den Kreis eine Kugelfläche mit dem Halbmesser ϱ und nehmen den Mittelpunkt dieser Kugel als Anfangspunkt. Ist dann do ein Element der Kugelfläche, dn die Normale, E die Entfernung des Elementes von der Stelle x, y, z, so wird das Potential des Kreisstroms an dieser Stelle

$$V=-\frac{j}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial n}\,do,$$

wo das Integral über alle Elemente do des Kugelsegmentes zu nehmen ist. Wir führen Kugelcoordinaten ein, deren Axe vom Mittelpunkt der Kugel ϱ nach dem Mittelpunkt des Kreises R gerichtet ist; (ϱ, μ, φ) sei eine Stelle der Kugel, (r, m, p) die Stelle x, y, z, und zwar bedeuten μ und m die Cosinus der Polarwinkel, φ und p die Längen.

Wir haben dann

$$do=-\varrho^2\,d\mu\,d\varphi,$$
$$dn=d\varrho,$$

womit angenommen wird, der Strom fliesse in positivem Sinne um die Axe; ferner

$$E^2=r^2+\varrho^2-2r\varrho\{m\mu+\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-\mu^2}\cos(p-\varphi)\},$$

und wenn wir nach Kugelfunctionen entwickeln unter der Voraussetzung, es sei $r<\varrho$:

$$\frac{1}{E}=\frac{1}{\varrho}Q^{(0)}+\frac{r}{\varrho^2}Q^{(1)}+\frac{r^2}{\varrho^3}Q^{(2)}+\ldots$$
$$=\sum_0^\infty{}_n\frac{r^n}{\varrho^{n+1}}Q^{(n)},$$

wo $Q^{(n)}$ die $n$te einfache Kugelfunction von dem Argument

$$\cos\vartheta=m\mu+\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-\mu^2}\cos(p-\varphi)$$

bedeutet. Ist endlich μ_1 der Werth von μ, welcher dem Kreisstrom entspricht, so wird

$$= -\frac{j}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_1^{\mu_1}\left\{Q^{(0)}+2\frac{r}{\varrho}Q^{(1)}+3\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 Q^{(2)}+\ldots+(n+1)\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n Q^{(n)}+\ldots\right\}d\mu\,d\varphi.$$

Die Integration nach φ kann sofort ausgeführt werden; es ist bekanntlich

$$\int_0^{2\pi} Q^{(n)}\,d\varphi = 2\pi\,P_\mu^{(n)}\,P_m^{(n)},$$

wo $P_\mu^{(n)}$ die $n$te einfache Kugelfunction mit dem Argument μ bedeutet; also wird

$$= -\frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\int_1^{\mu_1}\left\{1+2\frac{r}{\varrho}P_\mu^{(1)}P_m^{(1)}+3\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 P_\mu^{(2)}P_m^{(2)}+\ldots+(n+1)\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n P_\mu^{(n)}P_m^{(n)}+\ldots\right\}d\mu.$$

Aber auch die Integration nach μ kann ausgeführt werden; denn die $n$te Kugelfunction leistet der Gleichung Genüge,

$$\frac{d.(1-\mu^2)\,\frac{dP^{(n)}}{d\mu}}{d\mu}+n(n+1)P^{(n)}=0;$$

folglich ist

$$\int_1^{\mu_1} P_\mu^{(n)}\,d\mu = -\frac{1-\mu_1^2}{n(n+1)}\,\frac{dP_{\mu_1}^{(n)}}{d\mu_1}.$$

Für $n=0$ ist $P^{(0)}=1$ und $\int_1^{\mu_1} d\mu = -(1-\mu_1)$; wir erhalten demnach

$$V=\frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\left\{(1-\mu)P_m^{(0)}+\frac{r}{\varrho}(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu}P_m^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(2)}}{d\mu}P_m^{(2)}+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}P_m^{(n)}+\ldots\right\},$$

wo der Index 1 an μ weggelassen ist. Von nun an bedeutet μ den constanten Werth, welcher dem Kreisstrom entspricht. Setzen wir noch für ϱ seinen Werth in μ ein,

$$\varrho=\frac{R}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

so wird das Potential des Kreisstromes

$$(1)\qquad V=\frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l}(1-\mu)P_m^{(0)}+(1-\mu^2)^{3/2}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu}\frac{r}{R}P_m^{(1)}+\\ +\frac{1}{2}(1-\mu^2)^{4/2}\frac{dP_\mu^{(2)}}{d\mu}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_m^{(2)}+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{n}(1-\mu^2)^{\frac{n+2}{2}}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_m^{(n)}+\ldots\end{array}\right\}.$$

§. 67.

Die Potentiale einer einfachen Rolle und eines Rollenpaares.

Wir denken uns nun diesen Kreisstrom als einen der vielen Umgänge einer Drahtrolle. Und zwar sei der Draht auf einem Kreiscylinder einfach aufgewickelt, so dass die Windungen unmittelbar neben einander liegen; die Höhe der Rolle betrage $2h$, die Dicke des umsponnenen Drahtes sei Δ und die Anzahl der ganzen Umgänge $2N$, so dass

$$2h = 2N\Delta;$$

wir haben dann $2N$ Kreisströme von dem Halbmesser R neben einander. Endlich sei die Ebene, welche durch die Mitte der Rolle gelegt wird, um ζ_1 von dem Anfangspunkt entfernt, während ζ diese Entfernung für einen beliebigen der $2N$ Kreisströme bezeichne. Da

$$\mu = \frac{\zeta}{\sqrt{R^2+\zeta^2}},$$

kann das Potential V als eine Function von ζ betrachtet werden, und wir erhalten die Potentiale der $2N$ Kreisströme, wenn wir ζ die $2N$ Werthe geben:

$$\left(\zeta_1 - h + \frac{\Delta}{2}\right),\ \left(\zeta_1 - h + \frac{3}{2}\Delta\right), \ldots \left(\zeta_1 - \frac{\Delta}{2}\right),\ \left(\zeta_1 + \frac{\Delta}{2}\right),\ \ldots$$

$$\ldots \left(\zeta_1 + h - \frac{\Delta}{2}\right).$$

Das Potential der ganzen Rolle ist gleich der Summe dieser Potentiale und wird demnach bestimmt durch die Gleichung

$$V_{(1)} = \sum_{-N}^{N-1} V\left(\zeta_1 + \nu\Delta + \frac{\Delta}{2}\right).$$

Unter der Annahme, dass Δ sehr klein sei, können wir mittelst der Eulerschen Formel die Summe durch eine Reihe ausdrücken, welche nach steigenden Potenzen von Δ fortschreitet, und wenn wir mit den Gliedern von der Ordnung Δ^3 abbrechen, so folgt

$$V_{(1)} = \frac{1}{\Delta}\left[\int V(\zeta)d\zeta - \frac{\Delta}{2}V(\zeta) + \frac{\Delta^2}{12}\frac{\partial V(\zeta)}{\partial\zeta} - \frac{\Delta^4}{720}\frac{\partial^3 V(\zeta)}{\partial\zeta^3}\right]_{\zeta_1-h+\frac{\Delta}{2}}^{\zeta_1+h+\frac{\Delta}{2}}.$$

Die Grenzen $\zeta_1 + h + \frac{\Delta}{2}$ und $\zeta_1 - h + \frac{\Delta}{2}$ oberhalb und unterhalb der eckigen Klammer sollen bedeuten, dass der Werth des eingeklammerten Ausdrucks für die obere Grenze zu nehmen und der Werth für die untere Grenze davon abzuziehen sei. Schaffen wir noch das $\frac{\Delta}{2}$ aus den Grenzen fort, durch Entwicklung nach Potenzen von Δ, so folgt endlich

$$(2) \qquad V_{(1)} = \frac{1}{\Delta}\left[\int V(\xi)\,d\xi - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi} + \frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 \frac{\partial^3 V(\xi)}{\partial \xi^3}\right]_{\xi_1 - h}^{\xi_1 + h}.$$

Diese Formel kann nur zur Anwendung gebracht werden, wenn Δ einen ausserordentlich kleinen Werth besitzt; in dem von uns ins Auge gefassten Fall trifft dies immer zu, und das Glied mit $\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4$ wird niemals in Betracht kommen; wir führen dasselbe bloss an, um mit Sicherheit beurtheilen zu können, welche Vernachlässigung stattfindet, wenn wir alle Glieder weglassen, die von höhern Potenzen der Drahtdicke abhangen.

In die Gleichung (2) muss nun der Werth V aus der Gleichung (1) eingeführt werden. Wir haben daher zunächst das Integral

$$\int V(\xi)\,d\xi$$

zu berechnen. Durch die Gleichung (1) ist aber V gegeben als Function von μ, und μ, ξ hangen durch die Gleichungen zusammen

$$\varrho\mu = \xi, \qquad \varrho^2 = R^2 + \xi^2;$$

folglich ist

$$\xi = \frac{R\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$d\xi = \frac{R\,d\mu}{(1-\mu^2)^{3/2}},$$

und wir können das Integral schreiben:

$$R\int \frac{V\,d\mu}{(1-\mu^2)^{3/2}}.$$

Setzen wir hier das allgemeine Glied von V ein, so muss das folgende Integral ausgeführt werden

$$\int (1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} \frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\,d\mu.$$

Nun gilt für die Kugelfunctionen die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu} = \mu \frac{dP_\mu^{(n-1)}}{d\mu} + n\,P_\mu^{(n-1)};$$

wir können demnach für die Grösse unter dem Integral schreiben

$$(1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} \mu \frac{dP_\mu^{(n-1)}}{d\mu} + n\,(1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} P_\mu^{(n-1)},$$

und für das zweite Glied setzen

$$-\frac{1}{n-1}(1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} \frac{d.(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(n-1)}}{d\mu}}{d\mu},$$

so dass die Grösse unter dem Integral gleich wird

$$-\frac{1}{n-1}\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(n-1)}}{d\mu}\right\},$$

Folglich ist

$$(4)\quad \int(1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\,d\mu = -\frac{1}{n-1}(1-\mu^2)^{\frac{n+1}{2}}\frac{dP_\mu^{(n-1)}}{d\mu}.$$

Für das erste und das zweite Glied gilt diese allgemeine Formel nicht; beachten wir dies, so folgt

$$\int_{\zeta_1-h}^{\zeta_1+h} V(\xi)\,d\xi = \frac{2\pi jR}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{l}\int\frac{1-\mu}{(1-\mu^2)^{3/2}}\,d\mu + \mu\frac{r}{R}P_m^{(1)} - \\ -\frac{1}{1.2}(1-\mu^2)^{3/2}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_m^{(2)} - \ldots \\ -\frac{1}{(n-1)n}(1-\mu^2)^{\frac{n+1}{2}}\frac{dP_\mu^{(n-1)}}{d\mu}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_m^{(n)}\ldots\end{array}\right]_{\zeta_1-h}^{\zeta_1+h}.$$

In diesem Ausdruck ist das erste Glied unabhängig von r und m, also constant, und sein Werth ohne Bedeutung, da das Potential überhaupt nur bis auf eine willkührliche Constante bestimmt ist. Wir lassen daher in der Folge dieses erste Glied weg.

Weiter muss noch das zweite und das dritte Glied auf der rechten Seite der Gleichung (2) entwickelt werden. Wir haben

$$\frac{\partial V(\xi)}{\partial\xi} = \frac{\partial V}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{(1-\mu^2)^{3/2}}{R}\frac{\partial V}{\partial\mu},$$

und der von μ abhängige Factor in dem allgemeinen Gliede wird

$$(1-\mu^2)^{3/2}\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)^{\frac{n+2}{2}}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\right\}.$$

Wir schreiben

$$(1-\mu^2)^{3/2}\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\right\} =$$

$$= -(1-\mu^2)^{3/}\left\{n(n+1)(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}P_\mu^{(n)} + n\mu(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\right\},$$

und wenn wir beachten, dass nach Gleichung (3)

$$(n+1)P_\mu^{(n)} + \mu\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu} = \frac{dP_\mu^{(n+1)}}{d\mu},$$

so ergiebt sich

$$(5)\quad \frac{d.(1-\mu^2)^{\frac{n+2}{2}}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}}{d\xi} = -\frac{n}{R}(1-\mu^2)^{\frac{n+3}{2}}\frac{dP_\mu^{(n+1)}}{d\mu}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhalten wir auch

$$\frac{d^3.(1-\mu^2)^{\frac{n+2}{2}}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}}{d\zeta^3} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{R^3}(1-\mu^2)^{\frac{n+5}{2}}\frac{dP_\mu^{(n+3)}}{d\mu}.$$

Damit haben wir die sämmtlichen Glieder in dem Werth $V_{(1)}$ entwickelt; wir ordnen den Ausdruck nach den Abgeleiteten von $P_\mu^{(n)}$ und setzen zur Abkürzung

$$(6)\quad \begin{cases} A_1 = r\,P_m^{(1)}, \\ A_2 = \frac{r^2}{1.2}P_m^{(2)}, \\ A_3 = \frac{r^3}{2.3}P_m^{(3)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 r\,P_m^{(1)}, \\ A_4 = \frac{r^4}{3.4}P_m^{(4)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 r^2 P_m^{(2)}, \\ A_5 = \frac{r^5}{4.5}P_m^{(5)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 r^3 P_m^{(3)} + \frac{7}{360}2.3\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 r\,P_m^{(1)}, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = \frac{r^n}{(n-1)n}P_m^{(n)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 r^{n-2}P_m^{(n-2)} + \frac{7}{360}(n-3)(n-2)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 r^{n-4}P_m^{(n-4)}, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Grössen A hangen bloss von der Stelle r, m ab, wenn die Rolle aus demselben Draht gewickelt ist. Dann wird

$$(7)\quad V_{(1)} = \frac{2\pi jR}{\sqrt{2}\,\Delta}\left[\frac{A_1}{R}P_\mu^{(1)} - \frac{A_2}{R^2}(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu} - \frac{A_3}{R^3}(1-\mu^2)^{\frac{4}{2}}\frac{dP_\mu^{(2)}}{d\mu} - \cdots - \frac{A_n}{R^n}(1-\mu^2)^{\frac{n+1}{2}}\frac{dP_\mu^{(n-1)}}{d\mu} - \cdots\right]_{\zeta_1-h}^{\zeta_1+h}.$$

Wir haben das erste constante, d. h. von (r, m) unabhängige Glied weggelassen.

Für den spätern Gebrauch muss der Werth nach steigenden Potenzen von h entwickelt werden. Der Ausdruck in der Klammer kann als eine Function von ζ betrachtet werden, so dass

$$V_{(1)} = \left[V_{(1)}(\zeta)\right]_{\zeta_1-h}^{\zeta_1+h},$$

und wenn wir nun nach steigenden Potenzen von h entwickeln, so folgt

$$V_{(1)} = 2h\left\{\frac{dV_{(1)}(\zeta)}{d\zeta} + \frac{h^2}{2.3}\frac{d^3V_{(1)}(\zeta)}{d\zeta^3} + \cdots\right\}.$$

Hierin ist für ζ noch der Werth ζ_1 für die Mitte der Rolle einzusetzen; wir lassen aber von nun an wieder den Index 1 fort; ζ, μ sind dann constant und auf den mittlern Umgang der Rolle bezogen. Ferner giebt die Gleichung (5) auch hier die Abgeleiteten der einzelnen Glieder nach ζ. Wir setzen zur Abkürzung

$$(8)\quad \begin{cases} B_1 = A_1, \\ B_2 = A_2, \\ B_3 = 2\,A_3 + 1.2\,\frac{h^2}{2.3}\,A_1, \\ B_4 = 3\,A_4 + 1.2.3\,\frac{h^2}{2.3}\,A_2, \\ B_5 = 4\,A_5 + 2.3.4\,\frac{h^2}{2.3}\,A_3 + 1.2.3.4\,\frac{h^4}{2.3.4.5}\,A_1, \\ B_6 = 5\,A_6 + 3.4.5\,\frac{h^2}{2.3}\,A_4 + 1.2.3.4.5\,\frac{h^4}{2.3.4.5}\,A_2, \\ \cdots\cdots\cdots\

$$(n+1)\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n,$$

dass demnach die Reihe rascher convergirt, als die Entwicklung von

$$\frac{1}{\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)^2} = \frac{d}{d\left(\frac{r}{\varrho}\right)}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{r}{\varrho}\right)}\right)$$

nach steigenden Potenzen von $\left(\frac{r}{\varrho}\right)$.

Vernachlässigen wir Alles, was mit Δ multiplicirt ist, so wird

$$A_n = \frac{1}{(n-1)n} r^n P_m^{(n)}$$

und hienach

$$B_n = \frac{r^n}{n}\left\{P_m^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2.3}\left(\frac{h}{r}\right)^2 P_m^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4.5}\left(\frac{h}{r}\right)^4 P_m^{(n-4)} + \ldots\right\}.$$

Wenn n ungerade ist, so bricht die Reihe mit $P_m^{(1)}$ richtig ab; ist aber n gerade, so muss mit dem Gliede $P_m^{(2)}$ abgebrochen werden. Wir können jedoch das Glied mit $P_m^{(0)}$ noch hinzufügen; denn dasselbe ist unabhängig von r und m. Dann kann aber die Reihe summirt werden.

Zu dem Ende betrachten wir das Integral

$$C_n = \frac{1}{2nh}\int_{z-h}^{z+h} r^n P_m^{(n)}\, dz,$$

wo z mit r und m ebenso zusammenhangen soll, wie ξ mit ϱ und μ, während h die frühere Bedeutung hat. Es sei also

$$rm = z, \qquad r\sqrt{1-m^2} = \Gamma,$$

wo Γ eine Constante bedeutet. Wir entwickeln das Integral nach steigenden Potenzen von h und erhalten

$$C_n = \frac{1}{n}\left\{r^n P_m^{(n)} + \frac{h^2}{2.3}\frac{\partial^2 . r^n P_m^{(n)}}{\partial z^2} + \frac{h^4}{2.3.4.5}\frac{\partial^4 . r^n P_m^{(n)}}{\partial z^4} + \ldots\right\}.$$

Nun ist

$$z = \Gamma\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}, \qquad dz = \Gamma\frac{1}{(1-m^2)^{3/2}};$$

folglich

$$\frac{\partial . r^n P_m^{(n)}}{\partial z} = \Gamma^{n-1}(1-m^2)^{3/2}\frac{d.(1-m^2)^{-\frac{n}{2}} P_m^{(n)}}{dm}$$

$$= \Gamma^{n-1}(1-m^2)^{3/2}\left\{nm(1-m^2)^{-\frac{n+2}{2}} P_m^{(n)} + (1-m^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{dP_m^{(n)}}{dm}\right\}$$

$$= \Gamma^{n-1}(1-m^2)^{-\frac{n-1}{2}}\left\{nmP_m^{(n)} + (1-m^2)\frac{dP_m^{(n)}}{dm}\right\}.$$

Nach einem Satze der Kugelfunctionen ist aber

$$(11) \qquad nmP_m^{(n)} + (1-m^2)\frac{dP_m^{(n)}}{dm} = nP_m^{(n-1)};$$

folglich wird

$$(12) \qquad \frac{\partial . r^n P_m^{(n)}}{\partial z} = n r^{n-1}(1-m^2)^{-\frac{n-1}{2}} P_m^{(n-1)} = n r^{n-1} P_m^{(n-1)} .$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes folgt

$$\frac{\partial^2 . r^n P_m^{(n)}}{\partial z^2} = n(n-1) r^{n-2} P_m^{(n-2)},$$

$$\frac{\partial^4 . r^n P_m^{(n)}}{\partial z^4} = n(n-1)(n-2)(n-3) r^{n-4} P_m^{(n-4)},$$

u. s. w.

so dass

$$C_n = \frac{r^n}{n}\left\{ P_m^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2.3}\left(\frac{h}{r}\right)^2 P_m^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4.5}\left(\frac{h}{r}\right)^4 P_m^{(n-4)} + \ldots \right\}.$$

Dies ist aber der für B_n gefundene Werth.

Demnach ist, wenn Δ verschwindend klein angenommen wird,

$$(13) \qquad B_n = \frac{1}{2nh}\int_{z-h}^{z+h} r^n P_m^{(n)} \, dz .$$

Unter derselben Voraussetzung kann das allgemeine Glied in der Reihe für $V_{(1)}$ [Gleichung (9)] folgendermaassen geschrieben werden:

$$\frac{2\pi j \alpha}{\sqrt{2}}\left\{ \ldots + \frac{-\mu^2}{\varrho^n} \frac{dP_m^{(n)}}{d\mu} \frac{1}{2nh} \int_{z-h}^{z+h} r^n P_m^{(n)} \, dz + \ldots \right\}.$$

Nun sei der gröste Werth, den r annehmen kann (etwa die halbe Länge der Nadel), gleich l; dann ist, weil der gröste Werth von $P_m^{(n)}$ 1 ist,

$$\int_{z-h}^{z+h} r^n P_m^{(n)} \, dz < 2hl^n .$$

Wir haben ferner

$$(1-\mu^2)\frac{dP_m^{(n)}}{d\mu} = n(n+1)\int_{\mu}^{1} P_\mu^{(n)} \, d\mu < n(n+1) .$$

Folglich ist

$$\frac{1-\mu^2}{\varrho^n}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\frac{1}{2nh}\int_{z-h}^{z+h} r^n P_m^{(n)} \, dz < (n+1)\left(\frac{l}{\varrho}\right)^n,$$

und die Reihe convergirt somit schneller, als die folgende:

$$1 + \sum_1^\infty (n+1)\left(\frac{l}{\varrho}\right)^n = \frac{1}{\left(1-\frac{l}{\varrho}\right)^2} .$$

§. 69.

Umformung der für die Potentiale gefundenen Ausdrücke.

Wir benutzen die für B_n gefundene einfache Formel, um den Ausdruck $V_{(1)}$ auf eine übersichtliche Form zu bringen. Wir nehmen zunächst Δ verschwindend klein an und bezeichnen für diesen Fall die Potentiale mit $U_{(1)}$ und $U_{(2)}$, statt mit $V_{(1)}$ und $V_{(2)}$. Wie wir soeben gefunden, ist dann das Potential der einfachen Rolle

$$(14)\quad U_{(1)} = \frac{2\pi j\alpha}{\sqrt{2}}\,\frac{1-\mu^2}{2h}\int_{z-h}^{z+h}\left\{\begin{array}{r}\frac{r}{\varrho}\,P_m^{(1)}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 P_m^{(2)}\,\frac{dP_\mu^{(2)}}{d\mu}+\cdots\\ \cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n P_m^{(n)}\,\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}+\cdots\end{array}\right\}dz.$$

Aus dem Werthe $U_{(1)}$ folgt der von $V_{(1)}$ durch Anwendung der Euler'schen Summenformel; wir haben

$$V_{(1)} = U_{(1)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\frac{\partial^2 U_{(1)}}{\partial\zeta^2} + \frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4\frac{\partial^4 U_{(1)}}{\partial\zeta^4} - \cdots,$$

wo ζ in Bezug auf (ϱ, μ) dieselbe Bedeutung hat, wie z in Bezug auf (r, m). Die Werthe von den Abgeleiteten der einzelnen Glieder nach ζ folgen aus der Gleichung (5); wir haben

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1-\mu^2}{\varrho^n}\,\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\right) &= \frac{1}{R^n}\,\frac{d}{d\zeta}\left\{(1-\mu^2)^{\frac{n+2}{2}}\,\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}\right\}\\ &= -\frac{n}{R^{n+1}}(1-\mu^2)^{\frac{n+3}{2}}\,\frac{dP_\mu^{(n+1)}}{d\mu}\\ &= -\frac{n(1-\mu^2)}{\varrho^{n+1}}\,\frac{dP_\mu^{(n+1)}}{d\mu}.\end{aligned}$$

Wir erhalten durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung das allgemeine Glied von $V_{(1)}$ in der folgenden Form

$$V_{(1)} = \frac{2\pi j\alpha}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2h}\int_{z-h}^{z+h}\left\{\cdots+\left(\frac{1}{n}r^n P_m^{(n)} - \frac{n-1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 r^{n-2}P_m^{(n-2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{7}{360}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 r^{n-4}P_m^{(n-4)}-\cdots\right)\frac{1-\mu^2}{\varrho^n}\,\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu}+\cdots\right\}dz.$$

Ferner ergiebt sich mittelst der Gleichung (12)

$$(n-1)r^{n-2}P_m^{(n-2)} = \frac{1}{n}\,\frac{\partial^2.r^n P_m^{(n)}}{\partial z^2},$$

$$(n-1)(n-2)(n-3)r^{n-4}P_m^{(n-4)} = \frac{1}{n}\,\frac{\partial^4.r^n P_m^{(n)}}{\partial z^4},$$

u. s. w.,

so dass die Grösse in der Klammer die Form annimmt:

$$\frac{1}{n}\left(r^n P_m^{(n)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 . r^n P_m^{(n)}}{\partial z^2} + \frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 . r^n P_m^{(n)}}{\partial z^4} - \ldots\right).$$

Die Gleichung (12) liefert noch

$$\int_{z-h}^{z+h} r^n P_m^{(n)}\, dz = \frac{1}{n+1}\left[r^{n+1} P_m^{(n+1)}\right]_{z-h}^{z+h},$$

$$\frac{\partial . r^n P_m^{(n)}}{\partial z} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial^2 . r^{n+1} P_m^{(n+1)}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^3 . r^n P_m^{(n)}}{\partial z^3} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial^4 . r^{n+1} P_m^{(n+1)}}{\partial z^4},$$

u. s. w.,

so dass wir schliesslich für $V_{(1)}$ die folgende Form erhalten:

$$(15)\quad V_{(1)} = \frac{2\pi j\alpha}{\sqrt{2}}\frac{1-\mu^2}{2h}\left[\begin{array}{l} \frac{r^2 P_m^{(2)}}{1.2}\frac{dP_\mu^{(1)}}{\varrho\, d\mu} + \frac{r^3 P_m^{(3)}}{2\,3}\frac{dP_\mu^{(2)}}{\varrho^2 d\mu} + \\ + \frac{1}{3.4}\left(r^4 P_m^{(4)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 . r^4 P_m^{(4)}}{\partial z^2}\right)\frac{dP_\mu^{(3)}}{\varrho^3 d\mu} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{1}{n(n+1)}\left(r^{n+1} P_m^{(n+1)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 . r^{n+1} P_m^{(n+1)}}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + \frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 . r^{n+1} P_m^{(n+1)}}{\partial z^4} - \ldots\right)\frac{dP_\mu^{(n)}}{\varrho^n d\mu} + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right]_{z-h}^{z+h}.$$

Dem entsprechend wird das Potential eines Paares von symmetrisch aufgestellten einfachen Rollen

$$(16)\quad V_{(2)} = \frac{4\pi j\alpha}{\sqrt{2}}\frac{1-\mu^2}{2h}\left[\begin{array}{l} \frac{r^2 P_m^{(2)}}{1.2}\frac{dP_\mu^{(1)}}{\varrho\, d\mu} \\ + \frac{1}{3.4}\left(r^4 P_m^{(4)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 . r^4 P_m^{(4)}}{\partial z^2}\right)\frac{dP_\mu^{(3)}}{\varrho^3 d\mu} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{1}{(2n-1)2n}\left(r^{2n} P_m^{(2n)} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 r^{2n} P_m^{(2n)}}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + \frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 . r^{2n} P_m^{(2n)}}{\partial z^4}\right)\frac{dP_\mu^{(2n-1)}}{\varrho^{2n-1} d\mu} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right]_{z-h}^{z+h}.$$

§. 70.

Anwendung auf die Theorie der Tangentenboussole.

Mittelst der abgeleiteten Formeln können wir eine genaue Theorie der Tangentenboussole aufstellen.

Bei Anwendung der Weberschen Tangentenboussole werden die sämmtlichen Glieder vom zweiten an vernachlässigt; das zweite Glied muss also schon sehr klein sein. Dieses Glied fällt von selbst fort, wenn die Nadel symmetrisch magnetisirt ist, symmetrisch in Bezug auf die Axe und senkrecht auf die Axe. Wir haben nämlich bei einer solchen Symmetrie immer zwei entsprechende Theilchen entgegengesetzt gleicher magnetischer Flüssigkeit mit gleichem r und entgegengesetztem m, so dass aus der Summe über die ganze Nadel diejenigen Glieder fortfallen, welche in Bezug auf m gerade sind, also das zweite, vierte, u. s. f. Dann wird erst das dritte Glied vernachlässigt.

Wenn dies zulässig ist, so ergiebt sich nach Einsetzen der Werthe für die ersten Kugelfunctionen:

$$U_{(1)} = C + \frac{2\pi j\alpha}{\sqrt{2}} \frac{R^2}{\varrho^3} z .$$

Mittelst dieses Ausdruckes berechnen wir das Potential der einfachen Rolle auf die Magnetnadel. Wir bezeichnen für den Augenblick ein Theilchen magnetischer Flüssigkeit mit μ; es liege an der Stelle (r, m) oder (x, y, z). Die Rolle wird im Meridian aufgestellt; dann steht die z-Axe senkrecht auf dem Meridian, und die Drehungsaxe der Nadel fällt mit der y-Axe zusammen. Um das Potential der Rolle auf die Nadel zu berechnen, ist die Summe zu nehmen

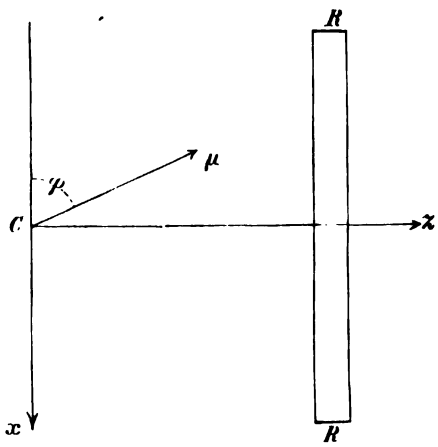


Fig. 54.

$$\Sigma \mu z$$

über die sämmtlichen Theilchen der Nadel. Ist nun M das magnetische Hauptmoment der Nadel, und wird die Richtung ihrer Axe ebenfalls mit M bezeichnet, so haben wir

$$\Sigma \mu z = M \cos (M, z) .$$

Die Axe liege in einer durch die Drehungsaxe gelegten verticalen Ebene; diese Ebene bilde mit dem Meridian den Winkel φ, während die Axe mit der Horizontalen den Winkel ν einschliesse. Dann ist

$$\cos (M, z) = \cos \nu \sin \varphi .$$

Bezeichnet ferner H die Horinzontalcomponente der erdmagnetischen Kraft, so wird das vom Erdmagnet auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$- H \Sigma \mu z = - HM \cos \nu \sin \varphi ;$$

denn die Richtung der Kraft H fällt mit der negativen x-Axe zusammen. Hieraus folgt das Potential der erdmagnetischen Kraft auf die Nadel

$$- HM \cos \nu \cos \varphi .$$

Demnach wird das Potential der sämmtlichen auf die Nadel ausgeübten Wirkungen

$$C + \frac{2\pi j \alpha}{\sqrt{2}} \frac{R^2}{\varrho^3} M \cos \nu \sin \varphi - HM \cos \nu \cos \varphi .$$

Das auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment ist gleich dem negativen Differentialquotienten des Potentiales nach φ; damit Gleichgewicht bestehe, muss dieses Drehungsmoment null sein; wir erhalten so für die Ruhelage der Nadel die Gleichung

$$- \frac{2\pi j \alpha}{\sqrt{2}} \frac{R^2}{\varrho^3} M \cos \nu \cos \varphi - HM \cos \nu \sin \varphi = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{2\pi j \alpha}{\sqrt{2} H} \frac{R^2}{\varrho^3} . \tag{17}$$

Der Werth von φ ist negativ, weil der Nordpol der Nadel aus dem Meridian nach Links abgelenkt wird, wenn der Strom in positivem Sinne durch die Rolle fliesst. Geben wir dem Strome die entgegengesetzte Richtung, so wird der Nordpol der Nadel nach der Rolle hin gezogen, der Südpol abgestossen.

Stellen wir endlich mit Weber die Rolle so auf, dass ihre Mittelebene durch den Drehungspunkt der Nadel geht, so wird $\varrho = R$, und wir erhalten dann die gewöhnliche Formel für die Tangentenboussole

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi j \alpha}{\sqrt{2} H R} ,$$

wo die Ablenkung φ aus dem Meridian positiv gerechnet ist.

Wir haben bei Herleitung der Formel (17) angenommen, dass die Nadel symmetrisch magnetisirt sei. Nun giebt es kein recht praktisches Mittel, um uns von der Zulässigkeit dieser Annahme zu überzeugen. Wir befreien uns aber hievon, wenn wir immer symmetrisch aufgestellte Rollenpaare auf die Nadel wirken lassen, und wir wollen das von nun an thun, so dass die geraden Glieder aus dem Potential U fortfallen. Wir haben dann bei Vernachlässigung des Gliedes von der dritten Ordnung das Potential:

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi j \alpha}{\sqrt{2}} \frac{R^2}{\varrho^3} z . \tag{18}$$

Bei genauen Messungen darf nun aber das Glied dritter Ordnung nicht vernachlässigt werden; es besteht aus zwei Factoren, deren einer von r und m, der andere bloss von μ und ϱ abhängt; dieser letztere, $\frac{1}{\varrho^3} \frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu}$, kann durch Messung der Grössen ϱ und μ wohl bestimmt

werden. Geben wir dann dem Rollenpaar verschiedene Stellungen, und beobachten wir die entsprechenden Ablenkungen der Nadel, so gelangen wir zu einer experimentellen Bestimmung der Coefficienten im dritten Gliede, welche von dem magnetischen Zustand der Nadel abhangen. Diese Bestimmung ist mit dem Instrument ein für alle Mal vorzunehmen.

Allein es giebt noch einen andern Weg um das Glied dritter Ordnung unschädlich zu machen; wir brauchen nämlich nur dem Rollenpaar eine solche Stellung zu geben, dass

$$\frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu} = 0. \tag{19}$$

Es ist

$$P_\mu^{(3)} = \frac{5}{2}\left(\mu^3 - \frac{3}{5}\mu\right);$$

folglich muss sein

$$\mu^2 = \frac{1}{5} \quad \text{oder} \quad \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + R^2} = \frac{1}{5},$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{4}R^2, \qquad \zeta = \frac{1}{2}R.$$

Die Vorschrift für die beste Aufstellung eines Rollenpaares ist also sehr einfach; die Rollen müssen so aufgestellt werden, dass die Entfernung ihrer Mittelebenen von dem Mittelpunkt der Nadel gleich der Hälfte ihres Halbmessers ist. Dann werden bei Anwendung der gewöhnlichen Formel für die Tangentenboussole erst die Glieder von der fünften Ordnung an vernachlässigt.

Wir gelangen so im Wesentlichen zu derjenigen Anordnung, welche Gaugain für die Tangentenboussole vorgeschlagen hat.*) Er ist gewissermaassen empirisch zu diesem Resultat gelangt. Bravais hat dann unter der sehr beschränkenden Annahme eines Umgangs und vollkommener Symmetrie der Nadel eine Theorie des Instrumentes entwickelt; in diesem Fall wird das Potential durch ein elliptisches Integral ausgedrückt.

Gaugain windet den Draht um einen Kegel; die Spitze des Kegels fällt in den Mittelpunkt der Nadel, und die Kanten bilden mit der Axe einen Winkel, dessen Tangente gleich 2 ist.

Wir wollen zuerst diesen einfachen Fall mit unsern Formeln verfolgen, und dann den allgemeinen behandeln, wo die Drahtumgänge der Rolle nicht bloss neben einander, sondern auch über einander liegen.

Nach der angegebenen Anordnung auf der Kegelfläche haben die sämmtlichen Kreisumgänge denselben Werth μ; es ändert sich bloss ϱ von dem einen Umgang zum andern. Nennen wir jetzt die Dicke des

---

*) Gaugain. Compt. rend. T. XXXVI, p. 191. 1853. Pogg. Ann. B. 88. S. 442.

umsponnenen Drahtes Δ', die Anzahl der Umgänge $2N'$ und die Höhe der Rolle $2k$, auf der Kegelfläche gemessen, so dass

$$2N'\Delta' = 2k,$$

und wenden wir wieder die Eulersche Summenformel an, so wird das Potential der conischen Rolle

$$V_c = \frac{1}{\Delta'}\left[V d\varrho - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^2 \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{7}{360}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^4 \frac{\partial^3 V}{\partial \varrho^3} - \cdots\right]_{\varrho-k}^{\varrho+k},$$

wo das ϱ in den Grenzen sich auf die Mitte der Rolle bezieht, und wo für V der durch Gleichung (1) bestimmte Werth, das Potential des Kreisstromes R, zu setzen ist. Für die conische Rolle ist R nicht constant; wir haben vielmehr

$$R = \varrho\sqrt{1-\mu^2},$$

und wenn wir diesen Werth in V einsetzen, so folgt:

$$(20) \qquad V_c = \frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\frac{1-\mu^2}{\Delta'}\left[C_1 r P_m^{(1)}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu} - \frac{1}{2}C_2 r^2 P_m^{(2)}\frac{dP_\mu^{(2)}}{d\mu} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots - \frac{1}{n}C_n r^n P_m^{(n)}\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu} - \cdots\right]_{\varrho-k}^{\varrho+k},$$

wo

$$C_1 = \log\varrho + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^2\frac{1}{\varrho^2} - \frac{7.1.2.3}{360}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^4\frac{1}{\varrho^4},$$
$$C_2 = \frac{1}{\varrho} - \frac{2}{6}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^2\frac{1}{\varrho^3} + \frac{7.2.3.4}{360}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^4\frac{1}{\varrho^5},$$
$$C_3 = \frac{1}{2\varrho^2} - \frac{3}{6}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^2\frac{1}{\varrho^4} + \frac{7.3.4.5}{360}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^4\frac{1}{\varrho^6},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_n = \frac{1}{(n-1)\varrho^{n-1}} - \frac{n}{6}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^2\frac{1}{\varrho^{n+1}} + \frac{7.n(n+1)(n+2)}{360}\left(\frac{\Delta'}{2}\right)^4\frac{1}{\varrho^{n+3}}.$$

Das zweite Glied hebt sich fort, wenn wir zwei conische Rollen zu beiden Seiten aufstellen, und das dritte verschwindet, wenn

$$\mu^2 = \frac{1}{5}, \quad \text{so dass} \quad \frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu} = 0.$$

§. 71.

Potential einer Rolle, welche aus mehreren über einander liegenden Drahtschichten besteht.

Wir dehnen nun die Betrachtung weiter aus. Wir haben bisher einfache Rollen betrachtet, welche von einer Schicht Umgängen gebildet werden; wir wollen nun auch den Fall behandeln, wo eine Anzahl Schichten über einander liegen. Und zwar seien die Drahtlagen so angeordnet, dass die zusammengesetzte Rolle immer als ein

System einfacher cylindrischer Rollen aufzufassen sei, denen dieselben Werthe von μ und h zugehören; von der einen Schicht zur andern ändere sich also nur der Werth von ϱ. Dann füllen die Drahtumgänge einen ringförmigen Canal aus, dessen Querschnitt ein Parallelogramm ist; die mittlern Umgänge der cylindrischen Schichten liegen auf der Kegeloberfläche μ, während ϱ von $\varrho_1 - k$ bis $\varrho_1 + k$ zunimmt, wo ϱ_1 sich auf den mittlern Umgang der zusammengesetzten Rolle bezieht. Die Anzahl von Kreisumgängen auf der Kegelfläche betrage $2N'$, der Abstand der Drahtmitten Δ', so dass

$$2k = 2N'\Delta'.$$

Ist die ganze Rolle aus demselben Draht gewickelt, so haben wir

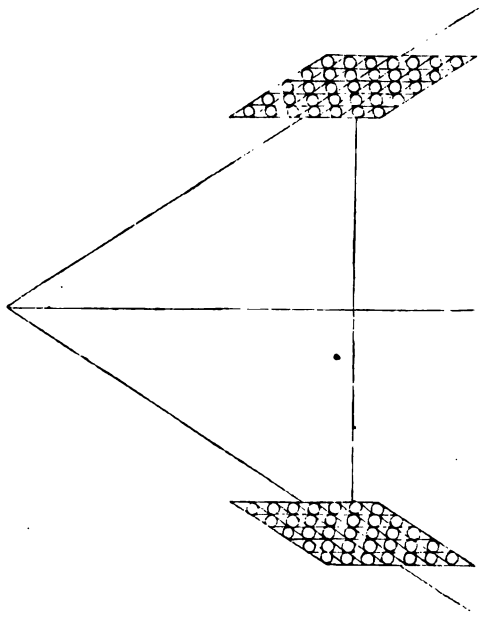


Fig. 55.

$$\Delta' = \frac{\Delta}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Wir erhalten das Potential dieser Rolle, indem wir die Summe von den Potentialen aller Schichten nehmen, also

$$V_{(3)} = \sum_{-N'}^{N'-1}{}' V_{(1)}\left(\varrho + \nu\Delta' + \frac{\Delta'}{2}\right).$$

Allein wir wollen nun alle Glieder vernachlässigen, welche mit einer Potenz der Drahtdicke multiplicirt sind. Wir schreiben dann U statt V und haben

$$U_{(3)} = \frac{1}{\Delta'}\int_{\varrho-k}^{\varrho+k} U_{(1)}(\varrho)\,d\varrho,$$

wo in den Grenzen ϱ dem mittlern Umgang entspricht; wir lassen den Index wieder weg. Nach Gleichung (9) hat $U_{(1)}$ den Werth:

$$(21)\qquad U_{(1)} = \frac{2\pi j\alpha}{\sqrt{2}}(1-\mu^2)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{D_1}{\varrho}\dfrac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu} + \dfrac{D_2}{\varrho^2}\dfrac{dP_\mu^{(2)}}{d\mu} + \cdots \\ \cdots + \dfrac{D_n}{\varrho^n}\dfrac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu} + \cdots\end{array}\right\},$$

wo

$$(22)\quad \begin{cases} D_1 = \quad r P_m^{(1)}, \\ D_2 = \frac{1}{2} r^2 P_m^{(2)}, \\ D_3 = \frac{1}{3} r^3 P_m^{(3)} + 2\frac{h^2}{2.3} r P_m^{(1)}, \\ D_4 = \frac{1}{4} r^4 P_m^{(4)} + 3\frac{h^2}{2.3} r^2 P_m^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_n = \frac{1}{n} r^n P_m^{(n)} + (n-1)\frac{h^2}{2.3} r^{n-2} P_m^{(n-2)} + \\ \qquad + (n-3)(n-2)(n-1)\frac{h^4}{2.3.4.5} r^{n-4} P_m^{(n-4)} + \cdots \end{cases}.$$

Hieraus folgt weiter, wenn β die Anzahl der über einander liegenden Schichten bezeichnet, so dass $\beta\Delta' = 2k$, für das Potential der geschichteten Rolle:

$$(23)\quad U_{(3)} = \frac{2\pi j\alpha\beta}{\sqrt{2}\,2k}(1-\mu^2)\left\{\begin{array}{l} D_1 \log\frac{\varrho+k}{\varrho-k}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu} \\ + \frac{D_2}{1}\left(\frac{1}{\varrho-k} - \frac{1}{\varrho+k}\right)\frac{dP_\mu^{(2)}}{d\mu} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{D_n}{n-1}\left(\frac{1}{(\varrho-k)^{n-1}} - \frac{1}{(\varrho+k)^{n-1}}\right)\frac{dP_\mu^{(n)}}{d\mu} \end{array}\right\}.$$

Lassen wir endlich ein symmetrisch aufgestelltes Paar von Rollen wirken, so ergiebt sich das Potential:

$$(24)\; U_{(4)} = \frac{4\pi j\alpha\beta}{\sqrt{2}\,2k}(1-\mu^2)\left\{\begin{array}{l} D_1 \log\frac{\varrho+k}{\varrho-k}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu} \\ + \frac{D_3}{2}\left(\frac{1}{(\varrho-k)^2} - \frac{1}{(\varrho+k)^2}\right)\frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{D_{2n-1}}{2(n-1)}\left(\frac{1}{(\varrho-k)^{2(n-1)}} - \frac{1}{(\varrho+k)^{2(n-1)}}\right)\frac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu} \end{array}\right\}.$$

In diesen Gleichungen sind die Grössen r und m von den Grössen ϱ und μ vollständig gesondert. Nach Gleichung (22) sind die D Functionen von r und m; sie enthalten ferner die Constante h; dagegen sind diese Coefficienten D völlig unabhängig von ϱ und μ.

Demnach können wir dem Rollenpaare wieder eine solche Stellung geben, dass das Glied dritter Ordnung verschwindet, und die Bedingung bleibt dieselbe,

$$\frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu} = 0.$$

Ueberhaupt gilt das oben Bemerkte ganz ebenso von der geschichteten Rolle, wie von der einfachen.

§. 72.

Passende Aufstellung von zwei Rollenpaaren. Lösung durch verschiedene Halbmesser der Rollen.

Wir gehen nun in der Anwendung unsrer Formeln einen Schritt weiter; wir lassen eine Anzahl von Rollen oder von Rollenpaaren auf die Magnetnadel wirken. Den sämmtlichen Rollen soll immer der Werth von h gemeinsam sein; dann haben die Coefficienten D für alle Rollen denselben Werth. Das Potential des Systemes von Rollen ist gleich der Summe von den Potentialen der einfachen Rollen, und wir können jetzt die Einrichtung treffen, dass aus der Summe eine grössere Zahl Glieder fortfallen, nicht nur das dritter Ordnung allein.

Wir betrachten zuerst den Fall von zwei einfachen Rollenpaaren. Dieselben müssen gleiche Höhe haben, damit h gleich sei; dagegen können die Werthe ϱ, μ, j, α beliebig gewählt werden; sie seien für die beiden Paare

$$\varrho_1,\ \mu_1,\ j_1,\ \alpha_1 \quad \text{und} \quad \varrho_2,\ \mu_2,\ j_2,\ \alpha_2.$$

Wir wollen weiter annehmen, es seien alle Rollen aus demselben Draht gewickelt; dann muss noch

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

sein, damit die Rollen gleiche Höhe erhalten.

Wir können die beiden Rollenpaare so aufstellen, dass aus dem Gesammtpotential die Glieder der dritten und der fünften Ordnung wegfallen. Denn dies giebt die beiden Gleichungen

$$(25)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{j_1(1-\mu_1^2)}{\varrho_1^3}\dfrac{dP_{\mu_1}^{(3)}}{d\mu_1} + \dfrac{j_2(1-\mu_2^2)}{\varrho_2^3}\dfrac{dP_{\mu_2}^{(3)}}{d\mu_2}, \\ 0 = \dfrac{j_1(1-\mu_1^2)}{\varrho_1^5}\dfrac{dP_{\mu_1}^{(5)}}{d\mu_1} + \dfrac{j_2(1-\mu_2^2)}{\varrho_2^5}\dfrac{dP_{\mu_2}^{(5)}}{d\mu_2}, \end{cases}$$

und denselben kann durch passende Wahl der Grössen ϱ_1, μ_1, j_1 und ϱ_2, μ_2, j_2 jedenfalls genügt werden. Behalten wir dann in dem Ausdruck für das Potential nur das erste Glied bei, so wird eine Grösse von der Ordnung

$$\left(\frac{r}{\varrho}\right)^7$$

vernachlässigt. Wenn also der gröste Werth von r, l, etwa den vierten Theil von ϱ beträgt, so wird eine Grösse der Ordnung

$$\left(\frac{1}{4}\right)^7 < \frac{1}{16000}$$

vernachlässigt. Wilhelm Weber giebt als Vorschrift für die gewöhn-

liche Tangentenboussole, dass das Verhältniss von l zu ϱ höchstens $\frac{1}{7}$ betrage, und es wird dann das Glied dritter Ordnung vernachlässigt, also eine Grösse von der Ordnung

$$\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}.$$

Den beiden Gleichungen (25) kann auf verschiedene Weise genügt werden. Wir setzen

$$A_1 = \frac{j_1(1-\mu_1^2)}{\varrho_1^3}, \qquad A_2 = \frac{j_2(1-\mu_2^2)}{\varrho_2^3};$$

es ist ferner

$$P_\mu^{(3)} = \frac{5}{2}\left(\mu^3 - \frac{3}{5}\mu\right), \qquad P_\mu^{(5)} = \frac{7.9}{2.4}\left(\mu^5 - \frac{10}{9}\mu^3 + \frac{5}{21}\mu\right);$$

also

$$\frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu} = \frac{3.5}{2}\left(\mu^2 - \frac{1}{5}\right), \qquad \frac{dP_\mu^{(5)}}{d\mu} = \frac{5.7.9}{2.4}\left(\mu^4 - \frac{2}{3}\mu^2 + \frac{1}{21}\right);$$

die Gleichungen lauten hienach

$$A_1\left(\mu_1^2 - \frac{1}{5}\right) + A_2\left(\mu_2^2 - \frac{1}{5}\right) = 0,$$

$$A_1\frac{\mu_1^4 - \frac{2}{3}\mu_1^2 + \frac{1}{21}}{\varrho_1^2} + A_2\frac{\mu_2^4 - \frac{2}{3}\mu_2^2 + \frac{1}{21}}{\varrho_2^2} = 0.$$

Wir genügen der zweiten Gleichung, indem wir für μ_1^2 und μ_2^2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung nehmen

$$\mu^4 - \frac{2}{3}\mu^2 + \frac{1}{21} = 0,$$

also der Gleichung

$$\frac{dP_\mu^{(5)}}{d\mu} = 0. \tag{26}$$

Die beiden Wurzeln sind

$$\mu_1^2 = \frac{1+2\sqrt{\frac{1}{7}}}{3}, \qquad \mu_2^2 = \frac{1-2\sqrt{\frac{1}{7}}}{3},$$

und die erste Gleichung giebt

$$A_2 = A_1\frac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}; \tag{27}$$

das Verhältniss $\frac{A_2}{A_1}$ ist positiv; die Ströme müssen also in demselben Sinn durch die beiden Rollen fliessen.

Den Werthen

$$\mu_1 = 0{,}785\ 0552, \qquad \mu_2 = 0{,}285\ 2315$$

entsprechen die Winkel

$$\vartheta_1 = 40^0\ 5', \qquad \vartheta_2 = 73^0\ 26',$$

und damit sind die Kegeloberflächen bestimmt, auf welchen die mittlern Umgänge der einfachen cylindrischen Rollen liegen sollen.

Der Gleichung (27) aber können wir in sehr verschiedener Weise Genüge leisten; wir lassen uns hiebei von praktischen Gesichtspunkten leiten.

Am Einfachsten ist wohl, die Stromstärken in beiden Rollen gleich zu setzen,

$$j_1 = j_2 = j;$$

man leitet denselben Strom nach einander durch die beiden Rollenpaare. Dann wird

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1-\mu_2^2}{1-\mu_1^2}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^3$$

und die Gleichung (27) giebt

$$\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^3 = \frac{1-\mu_1^2}{1-\mu_2^2}\,\frac{\mu_1^2 - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \mu_2^2} = \frac{29+4\sqrt{7}}{27}.$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^3 = 1{,}466, \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1{,}136.$$

Setzen wir z. B. $\varrho_2 = 1$, so ergeben sich die Werthe

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 1{,}136, & \varrho_2 &= 1, \\ R_1 &= 0{,}732, & R_2 &= 0{,}958, \\ \zeta_1 &= 0{,}869; & \zeta_2 &= 0{,}285. \end{aligned}$$

Mithin wird das Potential der beiden Rollenpaare in diesem Falle

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi j\alpha}{\sqrt{2}}\,\frac{R_1^2}{\varrho_1^2}\left\{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^3\right\} z,$$

wo der Factor von jz eine vollständig zu berechnende Zahl ist.

§. 73.

Lösung durch Stromverzweigung bei gleichen Halbmessern.

Zweitens kann der Gleichung (27) auch genügt werden, wenn die Rollen auf denselben Cylinder gewickelt sind. Wir haben dann

$$\varrho_1^2(1-\mu_1^2) = \varrho_2^2(1-\mu_2^2) = R^2,$$

und die Gleichung (27) giebt

$$\frac{j_2}{j_1} = \left(\frac{1-\mu_1^2}{1-\mu_2^2}\right)^{5/2}\frac{\mu_1^2 - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \mu_2^2} = 0{,}4446.$$

Die Stromstärken in den beiden Rollen sollen also in einem bestimmten Verhältniss stehen.

Dieser Bedingung wird praktisch durch Stromverzweigung

genügt. Wir behandeln die Aufgabe ganz allgemein, damit wir in den andern Fällen, wo die Stromstärken in einem bestimmten Verhältniss stehen sollen, uns hierauf beziehen können.

Wir denken uns dünne Drähte zur Anwendung gebracht; damit aber der Strom nicht allzusehr geschwächt werde, winden wir die eine Rolle aus s_1, die andere aus s_2 Drahtstücken und schalten die sämmtlichen Drahtstücke einer jeden Rolle neben einander in den Strom ein. Ferner sollen alle Drahtstücke einer Rolle dieselbe Länge haben, so dass jedes der s_1 Drahtstücke u_1 mal, jedes der s_2 Drahtstücke aber u_2 mal um den Cylinder gewickelt ist. Wir haben dann, weil beide Rollen aus demselben Draht gewickelt und gleich hoch sind,

$$s_1 u_1 = s_2 u_2 = \alpha .$$

Der Stammstrom J theilt sich in die beiden Rollen, deren Widerstände w_1 und w_2 seien; demnach wird

$$j_1 = J \frac{w_2}{w_1 + w_2}, \qquad j_2 = J \frac{w_1}{w_1 + w_2},$$

und die Bedingung

$$\frac{j_2}{j_1} = p$$

liefert

$$w_1 = p w_2 .$$

Nun seien die Längen der Drahtstücke, s_1 und s_2, gleich l_1 und l_2; wir haben dann

$$l_1 = 2\pi R u_1 + \lambda_1, \qquad l_2 = 2\pi R u_2 + \lambda_2,$$

wo λ_1 und λ_2 die Längen der Drahtstücke bedeuten, welche die Windungen mit dem Stammstrom verbinden. Dann sind die Querschnitte der Strombahn in den beiden Rollen, wenn q den Querschnitt des Drahtes bezeichnet,

$$Q_1 = q s_1, \qquad Q_2 = q s_2;$$

die Widerstände der beiden Zweige sind proportional $\frac{l_1}{Q_1}$ und $\frac{l_2}{Q_2}$; folglich ergiebt sich die Bedingung

$$\frac{2\pi R u_1 + \lambda_1}{s_1} = p \frac{2\pi R u_2 + \lambda_2}{s_2},$$

oder, weil

$$s_1 = \frac{\alpha}{u_1}, \qquad s_2 = \frac{\alpha}{u_2},$$

$$u_1 (2\pi R u_1 + \lambda_1) = p u_2 (2\pi R u_2 + \lambda_2) .$$

Wir drücken noch λ_1 und λ_2 in Theilen des Cylinderumfanges aus,

$$\lambda_1 = 2\pi R \lambda_1', \qquad \lambda_2 = 2\pi R \lambda_2',$$

so dass die Bedingung lautet

$$u_1 (u_1 + \lambda_1') = p u_2 (u_2 + \lambda_2') .$$

Hierin müssen die u ganze Zahlen sein; da λ_1' und λ_2' beliebig zu

wählen sind, kann dieser Bedingung immer genügt werden; in dem vorliegenden Falle können wir z. B. setzen

$$u_1 = 8, \qquad u_2 = 12, \qquad \lambda_1' = 0{,}67, \qquad \lambda_2' = 1.$$

Endlich muss noch der Bedingung genügt werden, dass s_1, s_2 und α ganze Zahlen seien,

$$\alpha = s_1 u_1 = s_2 u_2;$$

auch dies ist immer möglich, da u_1 und u_2 ganze Zahlen sind, und über α kann verfügt werden; wir setzen

$$\alpha = A u_1 u_1,$$

wo A eine ganze Zahl ist, und erhalten

$$s_1 = A u_2, \qquad s_2 = A u_1.$$

Bei dieser Anordnung wird der Werth des Potentiales

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi J \alpha}{\sqrt{2}} \frac{R^2}{w_1 + w_2} \left(\frac{w_2}{\varrho_1^3} + \frac{w_1}{\varrho_2^3} \right) z,$$

also

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi J \alpha}{\sqrt{2}} \frac{R^2}{\varrho_1^3} \frac{1 + p\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^3}{1+p} z.$$

§. 74.

Anwendung von zwei Paaren geschichteter Rollen.

Wir wollen noch den Fall betrachten, wo die Rollen aus über einander liegenden Umgängen gebildet sind. Das Potential eines Rollenpaares wird dann durch die Gleichung (24) bestimmt:

$$U_{(4)} = \frac{4\pi j \alpha \beta}{\sqrt{2}\, 2k} (1-\mu^2) \left\{ \begin{array}{l} \log \frac{\varrho + k}{\varrho - k} z \\ + \frac{D_3}{2} \left\{ \frac{1}{(\varrho - k)^2} - \frac{1}{(\varrho + k)^2} \right\} \frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu} \\ + \frac{D_5}{4} \left\{ \frac{1}{(\varrho - k)^4} - \frac{1}{(\varrho + k)^4} \right\} \frac{dP_\mu^{(5)}}{d\mu} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Wir stellen uns wieder die Aufgabe, durch Anwendung zweier Rollenpaare die Glieder der dritten und fünften Ordnung wegzuschaffen. Und zwar soll das Glied fünfter Ordnung wieder zum Verschwinden gebracht werden, indem die Werthe von μ^2 für die beiden Rollenpaare den beiden Wurzeln der in Bezug auf μ^2 quadratischen Gleichung (26) gleich gemacht werden, so dass für die beiden Rollen

$$\frac{dP_\mu^{(5)}}{d\mu} = 0.$$

Damit die Coefficienten D in den beiden Rollen gleiche
setzen wir die Werthe von h gleich; wir denken uns f

aus demselben Draht gewickelt, so dass auch die α gleich werden. Dann muss der weiteren Bedingung genügt werden

$$\frac{j_1\beta_1(1-\mu_1^2)}{k_1}\left\{\frac{1}{(\varrho_1-k_1)^2}-\frac{1}{(\varrho_1+k_1)^2}\right\}\left(\mu_1^2-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\frac{j_2\beta_2(1-\mu_2^2)}{k_2}\left\{\frac{1}{(\varrho_2-k_2)^2}-\frac{1}{(\varrho_2+k_2)^2}\right\}\left(\mu_2^2-\frac{1}{5}\right)=0. \tag{28}$$

Dies kann wieder auf sehr verschiedene Weise geschehen.

Wir wollen hier zuerst annehmen, der mittlere Durchmesser sei derselbe für die beiden Rollen,

$$\varrho_1^2(1-\mu_1^2)=\varrho_2^2(1-\mu_2^2)=R^2.$$

Ferner soll die Anzahl der Schichten in den beiden Rollen gleich sein,

$$k_1^2(1-\mu_1^2)=k_2^2(1-\mu_2^2)=K^2, \qquad \beta_1=\beta_2.$$

Die Gleichung (28) giebt dann für das Verhältniss der Stromstärken einen bestimmten Zahlenwerth,

$$\frac{j_1}{j_2}=p.$$

Dieser Bedingung kann durch Stromverzweigung genügt werden, ganz ebenso wie oben.

Der Endwerth für das Potential wird in diesem Fall

$$U_{(4)}=C+\frac{4\pi\alpha\beta}{\sqrt{2}\,2K}\log\frac{R+K}{R-K}\cdot R^3\left(\frac{j_1}{\varrho_1^3}+\frac{j_2}{\varrho_2^3}\right)z$$

oder

$$U_{(4)}=C+\frac{4\pi J\alpha\beta}{\sqrt{2}\,2K}\log\frac{R+K}{R-K}\cdot\frac{1+p\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^3}{1+p}\cdot\frac{R^3z}{\varrho_1^3}.$$

Wir können aber auch die Anordnung treffen, dass die Stromstärke in beiden Rollen dieselbe sei,

$$j_1=j_2.$$

Wir setzen dann

$$k_1=q\varrho_1, \qquad k_2=q\varrho_2,$$

wo q eine passend zu wählende Zahl bedeutet, und es folgt hieraus

$$\beta_1=\frac{2q\varrho_1\sqrt{1-\mu_1^2}}{\Delta}, \qquad \beta_2=\frac{2q\varrho_2\sqrt{1-\mu_2^2}}{\Delta}.$$

Demnach liefert die Gleichung (28) die Bedingung

$$\frac{(1-\mu_1^2)^{3/2}\left(\mu_1^2-\frac{1}{5}\right)}{\varrho_1^2}+\frac{(1-\mu_2^2)^{3/2}\left(\mu_2^2-\frac{1}{5}\right)}{\varrho_2^2}=0$$

oder

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}=0{,}9925.$$

Als Endausdruck für das Potential ergiebt sich jetzt

$$U_{(4)}=C+\frac{4\pi j\alpha}{\sqrt{2}\,2q}\log\frac{1+q}{1-q}\cdot\left(\frac{\beta_1R_1^2}{\varrho_1^3}+\frac{\beta_2R_2^2}{\varrho_2^3}\right)z.$$

§. 75.

Fortschaffung dreier Glieder durch Anwendung von zwei Paaren einfacher Rollen.

Wir haben mithin durch Anwendung zweier Rollenpaare die Glieder der dritten und der fünften Ordnung aus dem Gesammtpotential fortgeschafft, und zwar sowohl bei Annahme einfacher, als bei Annahme geschichteter Rollen. Man wird auf diesem Wege weiter gehen und durch Anwendung von drei Rollenpaaren auch noch die Glieder der siebenten Ordnung wegschaffen können, womit jedem praktischem Bedürfniss genügt wäre; allgemein würden durch Anwendung von n Rollenpaaren die Glieder fortgeschafft von der dritten bis zur $(2n+1)$ten Ordnung. Allein aus dem Obigen geht weiter hervor, dass hiebei noch sehr viel Willkürliches bleibt, und es fragt sich daher, ob man nicht mehr als n Glieder durch passende Anwendung von n Rollenpaaren fortschaffen kann. Wir finden wirklich, dass mittelst zweier Rollenpaare auch noch das Glied siebenter Ordnung kann fortgeschafft werden, und dann werden wir zeigen, wie allgemein durch Anwendung von n Rollenpaaren die Glieder fortgeschafft werden von dem der dritten bis zu dem der $(4n-1)$ten Ordnung.

Wir versuchen zuerst, durch zwei Paare einfacher Rollen die Glieder der dritten, fünften und siebenten Ordnung fortzuschaffen. Damit die Coefficienten D für beide Rollenpaare gleiche Werthe haben, müssen wir in beiden h gleich setzen; die drei Gleichungen, denen Genüge zu leisten ist, nehmen dann die folgende Form an:

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{j_1\alpha_1(1-\mu_1^2)}{\varrho_1^3}\dfrac{dP^{(3)}_{\mu_1}}{d\mu_1}+\dfrac{j_2\alpha_2(1-\mu_2^2)}{\varrho_2^3}\dfrac{dP^{(3)}_{\mu_2}}{d\mu_2}=0, \\ \dfrac{j_1\alpha_1(1-\mu_1^2)}{\varrho_1^5}\dfrac{dP^{(5)}_{\mu_1}}{d\mu_1}+\dfrac{j_2\alpha_2(1-\mu_2^2)}{\varrho_2^5}\dfrac{dP^{(5)}_{\mu_2}}{d\mu_2}=0, \\ \dfrac{j_1\alpha_1(1-\mu_1^2)}{\varrho_1^7}\dfrac{dP^{(7)}_{\mu_1}}{d\mu_1}+\dfrac{j_2\alpha_2(1-\mu_2^2)}{\varrho_2^7}\dfrac{dP^{(7)}_{\mu_2}}{d\mu_2}=0. \end{cases}$$

In diesen drei Gleichungen sind vier Grössen willkürlich, μ_1, μ_2, $\frac{j_1\alpha_1}{j_2\alpha_2}$ und $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$; wir können also noch über eine derselben verfügen. Am Vortheilhaftesten wird dies mit dem Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ geschehen. Man könnte die beiden Rollen auf derselben Cylinderfläche annehmen, oder auch beide in derselben Ebene. Am Einfachsten aber wird sein:

$$\varrho_1 = \varrho_2;$$

die mittlern Umgänge der Rollen liegen auf einer Kugelfläche, und wir erhalten die constante elektrodynamische Wirkung in einem kugelförmigen Raum.

Setzen wir unter dieser Annahme die Werthe der $P^{(n)}$ in die Gleichungen (29) ein, so werden diese Gleichungen:

$$0 = A_1\left(\mu_1^2 - \frac{1}{5}\right) + A_2\left(\mu_2^2 - \frac{1}{5}\right),$$

$$0 = A_1\left(\mu_1^4 - \frac{2}{3}\mu_1^2 + \frac{1}{21}\right) + A_2\left(\mu_2^4 - \frac{2}{3}\mu_2^2 + \frac{1}{21}\right),$$

$$0 = A_1\left(\mu_1^6 - \frac{15}{13}\mu_1^4 + \frac{45}{11.13}\mu_1^2 - \frac{5}{3.11.13}\right) +$$

$$+ A_2\left(\mu_2^6 - \frac{15}{13}\mu_2^4 + \frac{45}{11.13}\mu_2^2 - \frac{5}{3.11.13}\right),$$

wo

$$A_1 = j_1\alpha_1(1-\mu_1^2), \qquad A_2 = j_2\alpha_2(1-\mu_2^2).$$

Indem wir A_1 und A_2 aus den drei Gleichungen eliminiren, folgt

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2)\left\{\mu_1^2\mu_2^2 - \frac{1}{5}(\mu_1^2+\mu_2^2) + \frac{3}{5.7}\right\} = 0,$$

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2)\left\{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \frac{2}{3}\right\} = 0,$$

und hieraus $\mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{2}{3}, \qquad \mu_1^2\mu_2^2 = \frac{1}{3.7}.$

Demnach sind μ_1^2 und μ_2^2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\mu^4 - \frac{2}{3}\mu^2 + \frac{1}{3.7} = \frac{dP_\mu^{(5)}}{d\mu} = 0,$$

also derselben Gleichung, welche wir oben angenommen haben um zwei Glieder wegzuschaffen.

Wir finden also wieder

$$\mu_1^2 = \frac{1+2\sqrt{1/7}}{3}, \qquad \mu_2^2 = \frac{1-2\sqrt{1/7}}{3};$$

ferner wird jetzt

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1/5 - \mu_2^2}{\mu_1^2 - 1/5},$$

und somit

$$\frac{j_1\alpha_1}{j_2\alpha_2} = \frac{1-\mu_2^2}{1-\mu_1^2}\,\frac{1/5-\mu_2^2}{\mu_1^2-1/5} = 0{,}682.$$

Oben haben wir $\alpha_1 = \alpha_2$ genommen und dem Verhältniss der Stromstärken durch Stromtheilung den vorgeschriebenen Werth verschafft. Wir können aber auch die Stromstärken gleich setzen,

$$j_1 = j_2,$$

und es folgt dann

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0{,}682.$$

Dieser Werth ist sehr nahe gleich $\frac{15}{22}$. Wir müssen berücksich-

tigen, dass wir die Höhen aller Rollen gleich angenommen haben, dass also

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{15}{22}$$

sein soll. Um dieser Bedingung zu genügen, können wir entweder Drähte von entsprechender Dicke wählen, oder, was viel einfacher sein wird, Bündel von sehr dünnen Drähten anwenden, ein Mal 15, das andre Mal 22 Drähte neben einander. Treffen wir eine solche Anordnung, so wird das Potential der beiden Rollenpaare

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi j \alpha_1}{\sqrt{2}\varrho}\left\{1 - \mu_1^2 + \frac{22}{15}(1 - \mu_2^2)\right\} z$$

oder

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi j \alpha_1}{\sqrt{2}\varrho}\, 1{,}76 . z .$$

Treffen wir dagegen, wie früher, die Einrichtung, dass

$$\alpha_1 = \alpha_2 ,$$

indem wir den Strom in dem Verhältniss von 15 zu 22 zwischen den beiden Rollenpaaren theilen, so erhalten wir

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi J \alpha}{\sqrt{2}\varrho}\,\frac{(1 - \mu_1^2) w_2 + (1 - \mu_2^2) w_1}{w_1 + w_2} ,$$

wo

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{j_2}{j_1} = \frac{22}{15} ,$$

oder

$$U_{(2)} = C + \frac{4\pi J \alpha}{\sqrt{2}\varrho}\, 0{,}714 . z .$$

Hierin bezeichnet J die Stärke des Stammstroms, und die letztere Einrichtung wird im Allgemeinen vortheilhafter sein, weil die Stromstärke J mehr als das Vierfache der Stromstärke j beträgt.

§. 76.

Dasselbe bei Anwendung geschichteter Rollen.

Eine ganz ähnliche Betrachtung können wir für geschichtete Rollen anstellen.

Wie nehmen wieder die h und auch die ϱ für die beiden Rollen gleich an, ferner aber noch die k, um dieselben Bedingungen (29) zu erhalten. Nur die Grössen A_1 und A_2 haben dann eine etwas andere Bedeutung, nämlich

$$A_1 = j_1 \alpha_1 \beta_1 (1 - \mu_1^2) ,$$
$$A_2 = j_2 \alpha_2 \beta_2 (1 - \mu_2^2) .$$

Da wir dieselbe Gleichung für die Grössen μ_1 und μ_2 haben, erhalten die Rollen gleiche Stellung, wie oben.

Ferner haben wir, da die Grössen k gleich gesetzt sind, nicht gleich viel Schichten in jeder Rolle; nehmen wir denselben Draht, so ist

$$\beta_1 = \frac{k\sqrt{1-\mu_1^2}}{\Delta}, \qquad \beta_2 = \frac{k\sqrt{1-\mu_2^2}}{\Delta}.$$

Endlich folgt

$$\frac{j_1 \alpha_1}{j_2 \alpha_2} = 1{,}015.$$

Wir leisten dieser Bedingung unter der Annahme

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

dadurch Genüge, dass wir durch Stromtheilung dem Verhältniss der Stromstärken den von 1 wenig verschiedenen Werth verschaffen. Aus der Formel S. 206 folgt dann der Ausdruck für das Potential der beiden Rollenpaare.

§. 77.

Behandlung des allgemeinen Falls: Durch Anwendung von n Rollenpaaren werden $(2n-1)$ Glieder fortgeschafft.

Wir gehen nun über zur Behandlung der allgemeinen Aufgabe:

Mittelst n Rollenpaaren sollen die sämmtlichen Glieder weggeschafft werden bis zu dem der $(4n+1)$ten Ordnung.

Wir legen der Betrachtung Rollen mit einer einfachen Schicht von Drahtumgängen zu Grunde; die Resultate gelten dann auch, wie in dem eben betrachteten besondern Falle, für Rollen mit mehrfachen Schichten, wenn wir nur über die Dimensionen eine passende Bestimmung treffen.

Wir machen weiter die besondere Voraussetzung, dass die mittlern Umgänge der $2n$ Rollen auf ein und derselben Kugelfläche liegen. Diese Annahme ist nicht nothwendig; es müssen nur reelle Werthe für die n Grössen μ sich ergeben; im Uebrigen ist die Anordnung beliebig. Man kann z. B. annehmen, dass die mittleren Umgänge der Rollen auf einem Rotationsellipsoide liegen, und die Rechnung durchführen; in diesem Falle wird die Wirkung constant im Innern eines Raumes, der von einem Rotationsellipsoid begrenzt ist, und das kann unter Umständen vortheilhaft sein. Für andere Annahmen ist die Rechnung nicht angestellt worden; wahrscheinlich wird das Problem lösbar sein, wenn die mittleren Umgänge auf einer Cylinderfläche liegen; denn diese bildet einen Grenzfall des Rotationsellipsoides. Ob die sämmtlichen mittlern Umgänge auch in einer Ebene liegen können, ist zweifelhaft.

Die mittlern Umgänge sollen auf einer Kugelfläche von dem Halbmesser ϱ liegen; wir nehmen ferner die sämmtlichen Rollen gleich hoch an, so dass die h gleich sind. Dann muss den folgenden $(2n-1)$ Gleichungen genügt werden:

$$(30)\quad \begin{cases} 0 = A_1 \frac{dP^{(3)}_{\mu_1}}{d\mu_1} + A_2 \frac{dP^{(3)}_{\mu_2}}{d\mu_2} + \ldots + A_n \frac{dP^{(3)}_{\mu_n}}{d\mu_n}, \\ 0 = A_1 \frac{dP^{(5)}_{\mu_1}}{d\mu_1} + A_2 \frac{dP^{(5)}_{\mu_2}}{d\mu_2} + \ldots + A_n \frac{dP^{(5)}_{\mu_n}}{d\mu_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = A_1 \frac{dP^{(4n-1)}_{\mu_1}}{d\mu_1} + A_2 \frac{dP^{(4n-1)}_{\mu_2}}{d\mu_2} + \ldots + A_n \frac{dP^{(4n-1)}_{\mu_n}}{d\mu_n}, \end{cases}$$

wo die n Grössen A die Bedeutungen haben:

$$(31)\quad \begin{cases} A_1 = j_1 \alpha_1 (1 - \mu_1^2), \\ A_2 = j_2 \alpha_2 (1 - \mu_2^2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = j_n \alpha_n (1 - \mu_n^2). \end{cases}$$

Wir können über die n Grössen μ und über die Verhältnisse der n Grössen A verfügen; das Problem ist also völlig bestimmt; nur fragt sich, ob wir für die Grössen μ und A reelle Werthe erhalten, und für die ersteren solche, welche kleiner als 1 sind.

Hätten wir statt der einfachen Rollen solche mit mehreren übereinander liegenden Schichten angenommen, so wären wir zu demselben System Gleichungen (30) gelangt, sobald wir neben ϱ und h auch k in den sämmtlichen Rollen gleich gemacht hätten; nur die Werthe der Coefficienten A wären andere gewesen:

$$A_1 = j_1 \alpha_1 \beta_1 (1 - \mu_1^2), \quad \text{u. s. w.}$$

also bei Verwendung desselben Drahtes in allen Rollen:

$$A_1 = j_1 \alpha_1 (1 - \mu_1^2)^{3/2}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die im Folgenden abzuleitenden Lösungen der Gleichungen (30) umfassen mithin die beiden Fälle.

§. 78.

Auflösung der Gleichungen, welche die Lage der Rollen bestimmen.

Wir eliminiren aus dem System von $(2n - 1)$ Gleichungen die Grössen A, erhalten so eine Gleichung $n$ten Grades zur Bestimmung von μ und finden schliesslich die Werthe A.

Zunächst geben wir dem System Gleichungen eine viel einfachere Form, indem wir die vorhergehenden Gleichungen zur Reduction der folgenden benutzen. Wir setzen

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{S}{3}.$$

Ferner ist

$$\frac{dP_\mu^{(2\nu+1)}}{d\mu} = N_{2\nu+1}\left\{(2\nu+1)\,\mu^{2\nu} - (2\nu-1)\,\frac{(2\nu+1)\,2\nu}{2.(4\nu+1)}\,\mu^{2\nu-2} + \right.$$

$$\left. + (2\nu-3)\,\frac{(2\nu+1)\,2\nu\,(2\nu-1)\,(2\nu-2)}{2.4.(4\nu+1)\,(4\nu-1)}\,\mu^{2\nu-4} - \ldots\right|$$

wo $N_{2\nu+1}$ eine Zahl bedeutet. Endlich folgt

$$\int_{-1}^{1} P_\mu^{(2\nu+1)}\,\mu\,d\mu = 0 =$$

$$= N_{2\nu+1}\left\{\frac{1}{2\nu+3} - \frac{(2\nu+1)\,2\nu}{2.(4\nu+1)}\,\frac{1}{2\nu+1} + \frac{(2\nu+1)\,2\nu\,(2\nu-1)\,(2\nu-2)}{2.4.(4\nu+1)\,(4\nu-1)}\,\frac{1}{2\nu-1} - \ldots\right|$$

Berücksichtigen wir dies, so erhalten wir aus den Gleichungen (30)

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{S}{3},$$

$$3\{A_1\mu_1^2 + A_2\mu_2^2 + \ldots + A_n\mu_n^2\} = \frac{S}{5},$$

$$5\{A_1\mu_1^4 + A_2\mu_2^4 + \ldots + A_n\mu_n^4\} = \left\{\frac{5.4}{2.9}\,\frac{S}{5} - \frac{5.4.3.2}{2.4.9.7}\,\frac{S}{3}\right\} = \frac{S}{7},$$

allgemein

$$(2\nu+1)\{A_1\mu_1^{2\nu} + A_2\mu_2^{2\nu} + \ldots + A_n\mu_n^{2\nu}\} =$$

$$\frac{(2\nu+1)\,2\nu}{2.(4\nu+1)}\,\frac{S}{2\nu+1} - \frac{(2\nu+1)\,2\nu\,(2\nu-1)\,(2\nu-2)}{2.4.(2\nu+1)\,(2\nu-1)}\,\frac{S}{2\nu-1} + \ldots = \frac{S}{2\nu+3}.$$

Wir können demnach statt der Gleichungen (30) die folgenden annehmen:

$$(32)\quad \begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \dfrac{S}{1.3}, \\ A_1\mu_1^2 + A_2\mu_2^2 + \ldots + A_n\mu_n^2 = \dfrac{S}{3.5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1\mu_1^{4n-2} + A_2\mu_2^{4n-2} + \ldots + A_n\mu_n^{4n-2} = \dfrac{S}{(4n-1)\,(4n+1)}. \end{cases}$$

Aus der Form dieser Gleichungen ersehen wir, dass die n Grössen μ die Wurzeln einer Gleichung vom $n$ten Grade sein müssen. Diese Gleichung sei

$$\mu^{2n} + \mathsf{A}_1\mu^{2n-2} + \mathsf{A}_2\mu^{2n-4} + \ldots + \mathsf{A}_n = 0,$$

oder, wenn wir $\mu = \frac{1}{w}$ setzen,

$$1 + \mathsf{A}_1 w^2 + \mathsf{A}_2 w^4 + \ldots + \mathsf{A}_n w^{2n} = 0.$$

Wir haben dann

$$\frac{A_1}{1-\mu_1^2 w^2} + \frac{A_2}{1-\mu_2^2 w^2} + \ldots + \frac{A_n}{1-\mu_n^2 w^2} =$$

$$= \frac{B + B_1 w^2 + B_2 w^4 + \ldots + B_{n-1} w^{2n-2}}{1 + \mathsf{A}_1 w^2 + \mathsf{A}_2 w^4 + \ldots + \mathsf{A}_n w^{2n}}.$$

Wir entwickeln links nach steigenden Potenzen von w und erhalten

$$S\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{w^2}{3.5}+\frac{w^4}{5.7}+\ldots+\frac{w^{4n-2}}{(4n-1)(4n+1)}+\ldots\right\}.$$

Multipliciren wir dann mit dem Nenner der rechten Seite, und vergleichen wir die Coefficienten der Potenzen w^0, w^2, $\ldots w^{4n-2}$ links und rechts, so erhalten wir $2n$ Gleichungen; die n ersten enthalten die Grössen B; die n folgenden aber sind:

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{A_1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{A_2}{(2n-3)(2n-1)}+\ldots+\frac{A_n}{1.3},$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}+\frac{A_1}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{A_2}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots+\frac{A_n}{3.5},$$

. . . . . .

$$= \frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\frac{A_1}{(4n-3)(4n-1)}+\frac{A_2}{(4n-5)(4n-3)}+\ldots+\frac{A_n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Nun werden die Coefficienten der Gleichung

$$\frac{dP_\mu^{(2n+1)}}{d\mu}=0$$

durch dasselbe System Gleichungen bestimmt. Denn wir haben, wenn $\nu < n$,

$$\int_{-1}^{1}\left\{\int\frac{dP_\mu^{(2n+1)}}{d\mu}\mu^{2\nu}d\mu\right\}\mu\,d\mu=0.$$

Setzen wir also

$$\frac{dP_\mu^{(2n+1)}}{d\mu}=N\left\{\mu^{2n}+B_1\mu^{2n-2}+B_2\mu^{2n-4}+\ldots+B_n\right\},$$

so folgen zur Bestimmung der Grössen B die Gleichungen:

$$0=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{B_1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{B_2}{(2n-3)(2n-1)}+\ldots+\frac{B_n}{1.3},$$

$$0=\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}+\frac{B_1}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{B_2}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots+\frac{B_n}{3.5},$$

u. s. w.

Folglich sind die n Grössen μ^2 die n Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dP_\mu^{(2n+1)}}{d\mu}=0. \tag{33}$$

Diese Wurzeln sind alle reell, positiv und kleiner, als 1. Mithin ist die Lage der n Rollenpaare gefunden, und es handelt sich nur noch um die Berechnung der Coefficienten A.

§. 79.

Bestimmung der Coefficienten A; Berechnung der Stromstärken für den Fall von einfachen und von geschichteten Rollen.

Dies geschieht am Einfachsten mittelst der n ersten Gleichungen:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{S}{1.3},$$

$$A_1\mu_1^2 + A_2\mu_2^2 + \ldots + A_n\mu_n^2 = \frac{S}{3.5},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1\mu_1^{2n-2} + A_2\mu_2^{2n-2} + \ldots + A_n\mu_n^{2n-2} = \frac{S}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Wir suchen Multiplicatoren $\lambda_{n-1}^{(h)}, \lambda_{n-2}^{(h)}, \ldots \lambda_1^{(h)}, 1$ von der Beschaffenheit, dass

$$\text{für } h \gtrless k$$

$$\mu_k^{2n-2} + \lambda_1^{(h)}\mu_k^{2n-4} + \ldots + \lambda_{n-2}^{(h)}\mu_k^2 + \lambda_{n-1}^{(h)} = 0,$$

wo h und k eine der Zahlen 1, 2, ... n bedeuten. Dieser Bedingung wird genügt durch

$$\lambda_1^{(h)} = A_1 + \mu_h^2$$

$$\lambda_2^{(h)} = A_2 + A_1\mu_h^2 + \mu_h^4,$$

$$\lambda_3^{(h)} = A_3 + A_2\mu_h^2 + A_1\mu_h^4 + \mu_h^6,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{n-1}^{(h)} = A_{n-1} + A_{n-2}\mu_h^2 + \ldots + A_1\mu_h^{2n-4} + \mu_h^{2n-2}.$$

Denn der Ausdruck, welcher verschwinden soll, erhält die Form

$$\mu_k^{2n-2} + (A_1 + \mu_h^2)\mu_k^{2n-4} + (A_2 + A_1\mu_h^2 + \mu_h^4)\mu_k^{2n-6} +$$
$$\ldots + \{A_{n-1} + A_{n-2}\mu_h^2 + \ldots + A_1\mu_h^{2n-4} + \mu_h^{2n-2}\},$$

oder, wenn wir mit $\mu_k^2 - \mu_h^2$ multipliciren,

$$-A_n + A_n = 0.$$

Wir erhalten demnach

$$A_h = \frac{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{\lambda_1^{(h)}}{(2n-3)(2n-1)} + \ldots + \frac{\lambda_{n-2}^{(h)}}{3.5} + \frac{\lambda_{n-1}^{(h)}}{1.3}}{\mu_h^{2n-2} + \lambda_1^{(h)}\mu_h^{2n-4} + \ldots + \lambda_{n-2}^{(h)}\mu_h^2 + \lambda_{n-1}^{(h)}} S,$$

oder, wenn wir das Resultat nach Potenzen von μ_h ordnen,

$$\frac{A_h}{S} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.3}\mu_h^{2n-2} + \left(\frac{1}{3.5} + \frac{A_1}{1.3}\right)\mu_h^{2n-4} + \left(\frac{1}{5.7} + \frac{A_1}{3.5} + \frac{A_2}{1.3}\right)\mu_h^{2n-6} + \ldots \\ \quad \ldots + \left(\frac{1}{(2n-3)(2n-1)} + \frac{A_1}{(2n-5)(2n-3)} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{1.3}\right)\mu_h^2 + \\ \quad + \left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{A_1}{(2n-3)(2n-1)} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{1.3}\right) \end{array}\right\}}{n\mu_h^{2n-2} + (n-1)A_1\mu_h^{2n-4} + (n-2)A_2\mu_h^{2n-6} + \ldots + 2A_{n-2}\mu_h^2 + A_{n-1}}.$$

Somit ergeben sich zur Bestimmung der Stromstärken Gleichungen von der folgenden Form:

$$A_1 = j_1 \alpha_1 (1 - \mu_1^2) = a_1 S, \quad \text{u. s. w.},$$

wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ gegebene Zahlen sind, also, wenn wir die α gleich nehmen,

$$j_1 = \frac{a_1}{1-\mu_1^2}\frac{S}{\alpha}, \quad j_2 = \frac{a_2}{1-\mu_2^2}\frac{S}{\alpha}, \quad \ldots j_n = \frac{a_n}{1-\mu_n^2}\frac{S}{\alpha}.$$

Diesen Bedingungen wird durch Stromtheilung genügt, wie das in dem Falle von zwei Rollenpaaren gezeigt ist.

Haben wir statt der einfachen Rollen solche mit einer Anzahl von Drahtschichten, so sind die Stromstärken den folgenden Gleichungen gemäss zu bestimmen (S. 211):

$$j_1 = \frac{a_1}{(1-\mu_1^2)^{3/2}} S, \quad j_2 = \frac{a_2}{(1-\mu_2^2)^{3/2}} S, \quad \ldots j_n = \frac{a_n}{(1-\mu_n^2)^{3/2}} S.$$

Wir wollen endlich noch bemerken, dass man statt der einzelnen Lagen neben einander gewundener Drähte auch Blechstreifen zur Anwendung bringen kann; es fallen dann in aller Strenge die Glieder fort, welche von der Drahtdicke abhangen. Diese Einrichtung möchte unter Umständen vorzuziehen sein.

Die Werthe der Wurzeln sind für den Fall von zwei, drei und vier Rollenpaaren:

$$n = 2 \begin{cases} 0{,}765\ 0552 \\ 0{,}285\ 2280, \end{cases}$$

$$n = 3 \begin{cases} 0{,}871\ 734 \\ 0{,}591\ 701 \\ 0{,}209\ 308, \end{cases}$$

$$n = 4 \begin{cases} 0{,}919\ 53 \\ 0{,}738\ 76 \\ 0{,}477\ 94 \\ 0{,}165\ 28. \end{cases}$$

§. 80.

Das Potential des Systemes für einen äussern Punkt.

Die hauptsächliche Anwendung des eben gefundenen Rollensystems besteht nicht in der Construction einer genauen Tangentenboussole; man reicht da mit weit geringern Mitteln vollständig aus. Dagegen wird ein solches System vorzügliche Dienste leisten, um die Magnetisirung zu untersuchen. Sollen wir diesen Vorgang mit der Rechnung verfolgen können, so muss die wirkende Kraft an allen Stellen des magnetisirten Körpers dieselbe Grösse haben.

Wir denken uns innerhalb des Raumes, in welchem eine constante

Kraft wirkt. eine Kugel aus weichem Eisen; dies ist der einfachste Fall. Die Kugel wird in einen magnetischen Zustand versetzt, und wir können so eine constante Kraft wirken lassen, welche 20 bis 30Mal so stark ist, als die erdmagnetische. Mit Vortheil würde man dem Eisen die Form eines Rotationsellipsoides geben; dann wäre aber eine andere Anordnung der Rollen passend, wo die mittlern Umgänge auf einem confocalen Rotationsellipsoid liegen; wir haben dies oben schon angedeutet.

Wir bleiben bei dem Falle einer Kugel stehen. Es soll die Stärke ihrer Magnetisirung bestimmt werden, und wir erhalten einen einfachen Ausdruck für das Potential derselben in einem ausserhalb liegenden Punkt; daraus folgt die Wirkung der magnetisirten Kugel auf eine drehbar aufgestellte Magnetnadel oder auf eine bifilar aufgehängte Drahtrolle. Gleichzeitig wirken aber noch die Stromumgänge der Drahtrollen, und deshalb müssen wir die Untersuchung unseres Stromsystemes vervollständigen, indem wir auch das Potential desselben in einem äussern Punkt berechnen. Diese Bestimmung ist übrigens an sich ganz interessant.

Wir berechnen zunächst das Potential eines Stromumgangs in dem Punkt (r, m), welcher ausserhalb der durch den Strom gelegten Kugeloberfläche liegen soll. Wir haben (S. 184 ff.) für dieses Potential den Werth gefunden:

$$V_a = \frac{j\varrho^2}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\mu_1} \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial \varrho} \, d\mu \, d\varphi;$$

doch ist jetzt $\frac{\varrho}{r} < 1,$

folglich $\frac{1}{E} = \frac{1}{r} \left\{ Q^{(0)} + \left(\frac{\varrho}{r}\right) Q^{(1)} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 Q^{(2)} + \ldots \right\}.$

Bei Einsetzen dieser Reihe folgt, genau wie oben,

$$V_a = \frac{j}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\mu_1} \left\{ \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 Q^{(1)} + 2\left(\frac{\varrho}{r}\right)^3 Q^{(2)} + 3\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 Q^{(3)} + \ldots \right\} d\mu \, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \int_1^{\mu_1} \left\{ \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 P_m^{(1)} P_\mu^{(1)} + 2\left(\frac{\varrho}{r}\right)^3 P_m^{(2)} P_\mu^{(2)} + 3\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 P_m^{(3)} P_\mu^{(3)} + \ldots \right\} d\mu.$$

Führen wir ferner die Integrale nach μ mittelst des Satzes aus:

$$\int_1^{\mu_1} P_\mu^{(n)} \, d\mu = - \frac{1-\mu_1^2}{n(n+1)} \frac{dP_{\mu_1}^{(n)}}{d\mu_1},$$

schreiben wir dann statt μ_1 einfach μ, und nehmen wir gleich die

beiden Umgänge $\pm\mu$ in dem Rollenpaare zusammen, so ergiebt sich das Potential

$$(34)\quad V_a = -\frac{4\pi j(1-\mu^2)}{\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 P_m^{(1)}\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu}+\frac{1}{4}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4 P_m^{(3)}\frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu}+\\ \quad+\frac{1}{6}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6 P_m^{(5)}\frac{dP_\mu^{(5)}}{d\mu}+\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

Hieraus folgt, bei Benutzung der oben gebrauchten Bezeichnung für das Potential des symmetrisch aufgestellten Rollenpaares,

$$V_A = \frac{1}{\Delta}\left[\int V_a(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\frac{\partial V_a(\zeta)}{\partial\zeta}+\frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4\frac{\partial^3 V_a(\zeta)}{\partial\zeta^3}\right]_{\zeta_1-h}^{\zeta_1+h}.$$

Wir entwickeln nach steigenden Potenzen von h und erhalten:

$$=\frac{2h}{\Delta}\left\{V_a+\left[\frac{h^2}{2.3}-\frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 V_a}{\partial\zeta^2}+\left[\frac{h^4}{2.3.4.5}-\frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\frac{h^2}{2.3}+\frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4\right]\frac{\partial^4 V_a}{\partial\zeta^4}+\ldots\right\}.$$

Zur Bildung der Differentialquotienten benutzen wir hier die folgende Formel. Wir haben

$$\varrho\mu=\zeta,\qquad \varrho^2(1-\mu^2)=R^2;$$

folglich

$$\varrho^2=R^2+\zeta^2,\qquad \mu=\frac{\zeta}{\sqrt{R^2+\zeta^2}},\qquad d\mu=\frac{R^2\,d\zeta}{(R^2+\zeta^2)^{3/2}}.$$

Mithin wird

$$\frac{d\cdot\varrho^{2n}(1-\mu^2)\dfrac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}}{d\zeta}=$$

$$=\frac{d\varrho^{2n}}{d\zeta}(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}+\varrho^{2n}\frac{d\cdot(1-\mu^2)\dfrac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}}{d\zeta}$$

$$=2n\varrho^{2n-1}(1-\mu^2)\mu\frac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}-R^2\varrho^{2n-3}(2n-1)2nP_\mu^{(2n-1)}$$

$$=2n\varrho^{2n-1}(1-\mu^2)\left\{\mu\frac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}-(2n-1)P_\mu^{(2n-1)}\right\}.$$

Nun ist aber

$$(35)\qquad \mu\frac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}-(2n-1)P_\mu^{(2n-1)}=\frac{dP_\mu^{(2n-2)}}{d\mu}.$$

Folglich erhalten wir

$$(36)\qquad \frac{d\cdot\varrho^{2n}(1-\mu^2)\dfrac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}}{d\zeta}=2n\varrho^{2n-1}(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(2n-2)}}{d\mu}$$

und auf demselben Wege weiter

$$\frac{d^2.\varrho^{2n}(1-\mu^2)\dfrac{dP_\mu^{(2n-1)}}{d\mu}}{d\zeta^2} = 2n(2n-1)\varrho^{2n-2}(1-\mu^2)\frac{dP_\mu^{(2n-3)}}{d\mu},$$

u. s. w.

Wir können schliesslich schreiben:

$$(37)\quad V_A = -\frac{4\pi j\alpha}{\sqrt{2}}(1-\mu^2)\left\{M_1\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\frac{dP_\mu^{(1)}}{d\mu} + M_3\left(\frac{\varrho}{r}\right)^4\frac{dP_\mu^{(3)}}{d\mu} + M_5\left(\frac{\varrho}{r}\right)^6\frac{dP_\mu^{(5)}}{d\mu} + \ldots\right\},$$

wo, wie oben, gesetzt ist

$$\alpha = \frac{2h}{\Delta},$$

und wo die Coefficienten M die Bedeutung haben:

$$(38)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{1}{2}P_m^{(1)} + \left\{\frac{h^2}{2.3} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right\}\frac{3}{r^2}P^{(3)} + \\ \quad + \left\{\frac{h^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\frac{h^2}{2.3} + \frac{7}{360}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4\right\}\frac{3.4.5}{r^4}P_m^{(5)} + \ldots, \\ M_2 = \frac{1}{4}P_m^{(3)} + \left\{\frac{h^2}{2.3} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right\}\frac{5}{r^2}P_m^{(5)} + \ldots, \\ M_3 = \frac{1}{6}P_m^{(5)} + \ldots., \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Coefficienten M sind unabhängig von ϱ und μ; sie haben also für alle Rollen denselben Werth, und wenn wir nach den oben abgeleiteten Vorschriften n Rollenpaare aufstellen, so fallen auch hier aus dem Gesammtpotential die sämmtlichen Glieder fort, mit Ausnahme des ersten, bis zu dem der Ordnung $4n+1$. Allein damit wird jetzt das Potential nicht mehr eine lineare Function von z; denn der Coefficient M_1 wird durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe dargestellt.

Wir erhalten jedoch ein ziemlich einfaches Resultat, wenn wir alle Glieder vernachlässigen, welche von der Drahtdicke abhangen. Wir haben dann

$$M_1 = \frac{1}{2}\left\{P_m^{(1)} + \left(\frac{h}{r}\right)^2 P_m^{(3)} + \left(\frac{h}{r}\right)^4 P_m^{(5)} + \ldots\right\},$$

und wenn wir diese Reihe summiren, so folgt

$$M_1 = \frac{r^2}{4h}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rhm + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2rhm + h^2}}\right\}.$$

Mithin wird das Potential der n Rollenpaare in diesem Falle:

$$(39)\quad \begin{aligned} U_A = -\frac{2\pi\varrho^2}{\sqrt{2}}\left\{\frac{j_1(1-\mu_1^2)}{\Delta_1} + \frac{j_2(1-\mu_2^2)}{\Delta_2} + \ldots + \frac{j_n(1-\mu_n^2)}{\Delta_n}\right\} \times \\ \times\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rhm + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2rhm + h^2}}\right\}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat eine einfache physikalische Bedeutung; er stellt

das Potential eines Magnetes dar mit den Polen an den Stellen $+h$ und $-h$ der Axe; in diesen beiden Punkten sind die durch den Factor bestimmten Mengen positiver und negativer Flüssigkeit anzunehmen. Der Ausdruck ist genau bis auf Grössen von der Ordnung

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{2n+1};$$

dies ist schon für $n = 3$ und $r = 2\varrho$ eine sehr kleine Grösse.

Mittelst des Ausdruckes (39) können wir die Wirkung der Stromumgänge auf einen ausserhalb derselben befindlichen Magnet oder auf eine bifilar aufgehängte Rolle berechnen; ziehen wir von der Gesammtwirkung in dem von uns angenommenen Falle diese bekannte Wirkung des Stromsystemes ab, so bleibt die Wirkung der magnetisirten Eisenkugel übrig, und diese letztere Wirkung kann somit genau bestimmt werden.

VI. Kapitel.

Ueber die Strömung der Elektricität im Raum.

§. 81.

Allgemeine Gleichung für die stationäre Strömung im Raum.

Wir gehen nun über zur Ableitung der Principien für die Bewegung der Elektricität im Raum. Das Eigenthümliche der anzustellenden Untersuchung besteht darin, dass die Wege, welche bei einer linearen Leitung gegeben sind, hier erst müssen gesucht werden. Jedoch kann man durch eine sehr einfache Betrachtung die jetzt vorliegende Aufgabe auf die einer linearen Bewegung reduciren.

In einem bestimmten, beliebig von Nichtleitern begrenzten Raum befinde sich Elektricität in Strömung; ist diese Strömung stationär, so hat die elektrische Spannung, welche wir wieder mit u bezeichnen wollen, an jeder Stelle des leitenden Raumes einen bestimmten Werth, und es handelt sich wesentlich darum, u als Function von x, y, z zu bestimmen. Nun ist

$$u = \text{const.}$$

die Gleichung einer Oberfläche mit der physikalischen Bedeutung, dass die elektrische Spannung an jeder Stelle denselben Werth hat. Dann muss aber die Strömung senkrecht auf diese Oberfläche stattfinden, weil nach dem Ohmschen Grundsatz die Strömung zwischen zwei Punkten dem Unterschied der Spannung proportional ist. Folglich sind die Strömungscurven die rechtwinkligen Trajectorien all der Oberflächen, wo die Spannung in jedem Punkte denselben Werth hat.

Es sei do ein Element einer solchen Oberfläche, dn das Element der Normale. Errichten wir in sämmtlichen Punkten der Grenze von do die Normalen, so erhalten wir das Element eines Canals von der Eigenschaft, dass alle durch den Querschnitt do eintretende Elektricität in dem Canal bleiben muss. Ferner kann die Menge von Elektricität angegeben werden, welche in einer gegebenen Zeit durch die Fläche do hindurchströmt; denn es ist der Unterschied der Spannung am Anfang und am Ende von dn gleich

$$\frac{\partial u}{\partial n}\, dn;$$

nehmen wir weiter an, es sei der Körper homogen, und nennen wir sein Leitungsvermögen $\varkappa$, so strömt in der Richtung von dn während der Zeiteinheit durch das Flächenelement do die Elektricitätsmenge

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} do.$$

Diesen Ausdruck können wir aber durch die Summe von drei andern ersetzen; diese letztern bestimmen diejenigen Mengen von Elektricität, welche durch drei auf einander senkrechte Flächenelemente, die Projectionen von do auf die drei Coordinatenebenen, während der Zeiteinheit hindurchströmen.

Analytisch ist dies sofort klar. Wir haben nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial n} do = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right) do$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz\, dx + \frac{du}{\partial z} dx dy,$$

weil $$\frac{\partial x}{\partial n} = \cos(n, x), \quad \text{u. s. w.}$$

Somit wird

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} do = -\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} dy\, dz - \varkappa \frac{\partial u}{\partial y} dz\, dx - \varkappa \frac{\partial u}{\partial z} dx\, dy.$$

Dies ist eine Summe von drei Partialströmungen. Die erste derselben ist proportional $\frac{\partial u}{\partial x}$, und sie findet in der Richtung der positiven x-Axe statt durch das Flächenelement $dy\, dz$; entsprechende Bedeutung haben die beiden andern Ausdrücke. Demnach kann die Strömung durch ein Element der Oberfläche $u = \text{const.}$ in der Richtung der Normale ersetzt werden durch drei auf einander rechtwinklige Strömungen, welche in der Richtung der drei Coordinatenaxen durch die Projectionen des Elementes do auf die drei Coordinatenebenen stattfinden.

Wir können aber diese Transformation auch geometrisch vornehmen. Wir denken uns die Elektricitätsmenge

$$\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right) do,$$

welche durch das Flächenelement do hindurchströmt, dargestellt durch ein Prisma von der Basis do und der Höhe $\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right)$; für dieses Prisma können wir drei andere setzen, mit den Grundflächen

$$\cos(n, x)\, do, \qquad \cos(n, y)\, do, \qquad \cos(n, z)\, do,$$

und den Höhen

$$\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right)\cos(n, x), \qquad \left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right)\cos(n, y), \qquad \left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right)\cos(n, z).$$

Demnach wird

$$\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right) do = \left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right)\cos(n, x) \,.\, \cos(n, x)\, do +$$
$$+ \left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right)\cos(n \qquad\qquad +$$
$$+ \left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial n}\right)\cos(n$$

Nun ist einmal

$$\cos(n,x)\,do = dy\,dz, \text{ u. s. w.};$$

dann aber haben wir, wenn wir uns statt der Coordinaten x, y, z die neuen n, s, t eingeführt denken, n in der Richtung der Normale auf die Oberfläche, s und t parallel der Oberfläche,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,x),$$

weil $\frac{\partial u}{\partial s}$ und $\frac{\partial u}{\partial t}$ null sind, u. s. w.

Mittelst der eben angestellten Betrachtung ist es leicht, die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der Elektricität im Raum abzuleiten, unter der Voraussetzung eines stationären Strömungszustandes, welchen Fall wir hier allein behandeln.

Wir denken uns an der Stelle (x, y, z) ein rechtwinkliges Parallelepipedum ausgeschnitten, mit den Kanten dx, dy, dz parallel den drei Coordinatenaxen; wir berechnen die Mengen von Elektricität, welche während der Zeiteinheit durch die Seitenflächen einströmen und ausströmen; diese beiden Mengen müssen einander gleich sein, wenn ein stationärer Zustand der Strömung stattfindet.

Nun strömen, nach der eben abgeleiteten Formel, durch die drei Seitenflächen, welche in der Ecke (x, y, z) zusammenstossen, die folgenden drei Mengen von Elektricität ein:

$$-\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz,$$

$$-\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\,dz\,dx,$$

$$-\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy;$$

dagegen strömen durch die drei andern Seiten die Mengen aus:

$$-\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\right)dy\,dz,$$

$$-\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\right)dz\,dx,$$

$$-\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dz\right)dx\,dy.$$

Folglich ist die Differenz der beiden Summen gleich

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

und da dieselbe null sein soll, ergiebt sich für die Spannung u die allgemeine Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Sie stimmt mit der Gleichung für die stationäre Bewegung der Wärme vollständig überein. Wir können daher die Spannung u als ein Potential von Massen betrachten, die ausserhalb des Raumes liegen, in welchem die Elektricität strömt. Ein Unterschied von dem Problem des stationären Temperaturzustandes tritt erst in den Grenzgleichungen hervor.

Die Gleichung (1) kann noch auf einem andern Wege abgeleitet werden. Wir construiren im Innern des Raumes eine beliebige Oberfläche; wie diese auch beschaffen sein mag, die Summe der ganzen während der Zeiteinheit ausströmenden Elektricitätsmenge muss null sein.

Es sei do ein Element der Oberfläche, dn die Richtung der Normale, nach Aussen positiv gerechnet. Dann strömt durch das Element do die Elektricitätsmenge aus

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} do,$$

folglich durch die ganze Oberfläche die Menge

$$-\varkappa \int \frac{\partial u}{\partial n} do = -\varkappa \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n} \right) do$$

$$= -\varkappa \int\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz\, dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx\, dy \right).$$

Dieses Integral, welches über alle Elemente do der geschlossenen Oberfläche zu nehmen ist, kann nach einem bekannten Satze durch ein Raumintegral ersetzt werden; dasselbe ist auszudehnen über den ganzen Rauminhalt der geschlossenen Oberfläche und hat die Form

$$-\varkappa \int\int\int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz.$$

Durch Integration der drei Glieder nach x, y oder z folgt sofort das Oberflächenintegral. Dieses Raumintegral soll nun gleich null sein für jeden beliebigen Theil des leitenden Raumes, folglich auch gleich null für jeden unendlich kleinen Theil. Der eingeklammerte Ausdruck unter dem Integral muss also gleich null sein für jede Stelle des Raumes, und das giebt die Gleichung (1).

§. 82.

Bedingungen an der Oberfläche; Grenzgleichungen.

Neben der allgemeinen Gleichung (1) muss noch einer Bedingung an der Oberfläche genügt werden; dadurch wird das Problem zu einem völlig bestimmten.

Wir betrachten den allgemeinen Fall, wo zwei Leiter zusammenstossen. Wir nehmen ein Element der Grenzfläche und construiren senkrecht auf dasselbe ein Prisma, welches zum Theil in dem e
zum Theil in dem andern Leiter liegt. Das Oberflächenelement s

das Element der Normale dn; ferner bezeichnen $\varkappa'$ und u' das Leitungsvermögen und die Spannung für den zweiten Leiter. In das Prisma muss ebensoviel Elektricität ein-, wie ausströmen. Nun strömt durch die eine Grundfläche die Menge ein

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} do,$$

durch die gegenüber liegende aber aus

$$-\varkappa' \frac{\partial u'}{\partial n} do;$$

die Ausdrücke gelten eigentlich für den Fall, wo die beiden Flächen an derselben Stelle liegen, und wenn wir dem Abstand dn Rechnung tragen, so müssen wir für die zweite Menge setzen

$$-\varkappa' \left(\frac{\partial u'}{\partial n} + \frac{\partial^2 u'}{\partial n^2} dn\right) do.$$

Doch ist der Unterschied unendlich klein von der dritten Ordnung und neben Grössen zweiter Ordnung zu vernachlässigen. Dasselbe gilt von den Mengen Elektricität, welche durch die Seitenflächen des Prismas ein- und ausströmen; man sieht, dass die Glieder der zweiten Ordnung sich herausheben. Folglich bleiben von Grössen zweiter Ordnung nur die beiden oben genannten, und diese müssen einander gleich sein, wenn die Strömung durch die Grenze stationär ist; so erhalten wir die Bedingung an der Grenze

$$\varkappa \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = \varkappa' \overline{\frac{\partial u'}{\partial n}}. \tag{2}$$

Der horizontale Strich soll bedeuten, dass die Werthe der Differentialquotienten für eine Stelle der Grenze zu nehmen seien.

Wir haben aber an der Grenze der beiden Leiter noch eine zweite Bedingung; bezeichnen wir nämlich mit K und K' die sogenannten Spannungszahlen der beiden Leiter, wie wir dieselben oben betrachtet haben, so muss nach dem Voltaschen Gesetz noch die Gleichung stattfinden

$$\bar{u} - \bar{u}' = K - K'. \tag{3}$$

Demnach gelten an der Grenze zweier Leiter zwei Gleichungen.

Nur in dem Falle, wo die Oberfläche des Leiters frei ist, d. h. von einem Isolator begrenzt, wie Luft, Terpentinöl, Alkohol, u. s. w., deren Leitungsvermögen verschwindend klein ist, haben wir einer einzigen Bedingung zu genügen. Die Gleichung (3) fällt dann fort, und wir haben weiter $\varkappa' = 0$. Folglich gilt an der Grenze des Leiters mit einem Isolator die eine Gleichung

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = 0. \tag{4}$$

Wir haben damit die Grundlage gewonnen, um jede Frage nach der stationären Bewegung der Elektricität im Raum zu beantworten.

§. 83.

Betrachtung des Falles, wo der leitende Raum unbegrenzt ist.

Wir machen zuerst eine Anwendung der Formeln auf einen möglichst einfachen Fall. Es stehe eine galvanische Kette $\alpha\gamma\beta$ in Verbindung mit einem unendlich grossen Leiter; wir denken uns die Kette isolirt in dem Leiter, ohne ihr Dasein bei Berechnung der Bewegung von Elektricität in dem unbegrenzt leitenden Raum zu berücksichtigen. Wir betrachten zuerst diesen nicht realisirbaren, aber sehr einfachen Fall, um das Wesen der Methode deutlich hervortreten zu lassen.

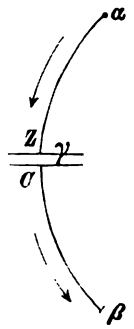


Fig. 56.

Die Spannung in dem unbegrenzten Leiter sei u, die Spannungen in den beiden linearen Leitern $\alpha\gamma$ und $\gamma\beta$ v und v', eine Stelle des leitenden Raumes (x, y, z) und endlich die Länge des linearen Leiters, von α aus gerechnet, s. Dann haben wir erstens die allgemeinen Gleichungen:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v'}{\partial s^2}=0.$$

Wir unterscheiden ferner die Werthe der Spannungen in den Stellen α, β, γ durch den beigefügten Index. Endlich sei, wie oben, $\varkappa$ das elektrische Leitungsvermögen des Raumes, k und k' die der beiden linearen Leiter, q und q' deren Querschnitte, M die Spannungszahl des unbegrenzten homogenen Leiters, K die der Kupferplatte und der beiden Drähte, Z die der Zinkplatte, dagegen $[F, Z]$ und $[K, F]$ die Spannungsunterschiede zwischen Zink und Flüssigkeit und zwischen Flüssigkeit und Kupfer. Dann liefert das Voltasche Spannungsgesetz die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_\alpha - u_\alpha &= K - M,\\ v'_\gamma - v_\gamma &= Z - K + [F, Z] + [K, F],\\ u_\beta - v'_\beta &= M - K. \end{aligned}$$

Wir nehmen gleich die Summe und erhalten

$$(6)\qquad v_\alpha - u_\alpha + v'_\gamma - v_\gamma + u_\beta - v'_\beta = \Delta,$$

wo

$$\Delta = Z - K + [F, Z] + [K, F]$$

die elektromotorische Kraft des Elementes bedeutet. In dem vorliegenden Falle, wie in allen [illegible] ligt diese eine Gleichung, welche durch Summirung der [illegible] Kräfte an den sämmtlichen Grenzstellen erhalten [illegible] die Bewegung in dem unendlichen Leiter [illegible] ung, nicht

aber die Spannung in den linearen Leiterstücken zu berechnen. Die Gleichung (6) entspricht genau dem Kirchhoffschen Satze (S. 56); sie ist eine Verallgemeinerung desselben für den Fall nicht linearer Bewegung.

Wir müssen endlich noch die Gleichungen aufstellen, welche für die Strömung durch die Grenzstellen gelten. Zu diesem Ende denken wir uns die Berührungsflächen zwischen dem Draht und dem unbegrenzten Leiter als sehr kleine Kugelflächen und bezeichnen die Entfernung von dem Kugelmittelpunkt mit r. Ist dann do das Element einer solchen Kugelfläche um den Punkt α, so strömt durch dieses Element die Menge von Elektricität

$$\varkappa \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\alpha do$$

in die Kugel ein, und die Menge, welche durch die ganze Kugelfläche einströmt, muss derjenigen gleich sein, welche durch den ersten Querschnitt in den Draht einströmt; die letztere ist aber gleich

$$- k \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_\alpha q.$$

So erhalten wir an der Grenzstelle α die Gleichung

$$\varkappa \int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\alpha do = - kq \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_\alpha;$$

eine analoge gilt für die Stelle β, und an der Stelle γ haben wir, wie früher,

$$- kq \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_\gamma = - k' q' \left(\frac{\partial v'}{\partial s}\right)_\gamma.$$

Somit gelten noch die drei Grenzgleichungen zweiter Art:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varkappa \int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\alpha do = - kq \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_\alpha, \\ \quad kq \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_\gamma = \quad k' q' \left(\frac{\partial v'}{\partial s}\right)_\gamma, \\ \varkappa \int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\beta do = \quad k' q' \left(\frac{\partial v'}{\partial s}\right)_\beta, \end{cases}$$

wo die Integrale über die sehr kleinen Kugelflächen um die Stellen α und β zu nehmen sind.

Aus den Gleichungen (5), (6) und (7) sind die Strömungen $\frac{\partial v}{\partial s}$ und $\frac{\partial v'}{\partial s}$ in den beiden linearen Leiterstücken und die Spannung u in dem unbegrenzten Leiter zu ermitteln.

Die Lösung kann gewissermaassen errathen werden. Wir haben zunächst

$$\frac{\partial v}{\partial s} = n, \qquad \frac{\partial v'}{\partial s} = n',$$

wo n und n' zu bestimmende Constanten sind; für u aber setzen wir ein

$$(8) \qquad u = \frac{A}{E_{\alpha, p}} + \frac{B}{E_{\beta, p}},$$

wo $E_{\alpha,p}$ und $E_{\beta,p}$ die Entfernungen der durch die Indices bezeichneten Punkte bedeuten, unter p der beliebige Punkt (x, y, z) des unbegrenzten Leiters verstanden; A und B sind Constanten. Doch soll der Ausdruck nur gelten ausserhalb der beiden sehr kleinen Kugeln; denn im Innern derselben würde das eine Glied unendlich.

Wir ersetzen daher das erste Glied

$$\frac{A}{E_{\alpha,p}}$$

durch das Potential der gleichmässig mit Masse belegten Kugeloberfläche um die Stelle α. Die Dichtigkeit der Belegung sei δ_α, der Kugelhalbmesser R_α; dann ist für äussere Punkte

$$A = 4\pi R_\alpha^2 \delta_\alpha.$$

Für einen Punkt der Kugeloberfläche wird das Potential gleich

$$4\pi R_\alpha \delta_\alpha,$$

und dieser constante Werth gilt für das ganze Innere der Kugel.

Bekanntlich leistet der Ausdruck u der Bedingung Genüge, dass in dem leitenden Raum die Summe der zweiten Differentialquotienten gleich null sei. Wir haben den Werth aber noch in die Grenzgleichungen einzusetzen.

Der Abstand der Stellen α und β sei ϱ; dann wird

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\alpha = -\frac{A}{r^2} - \frac{B}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial r}$$

und somit $$\int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\alpha do = -4\pi A - B\int \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial r}\, do.$$

Das Integral auf der rechten Seite aber verschwindet; denn dasselbe hat die Form

$$\int \frac{\cos(\varrho, r)}{\varrho^2}\, do,$$

wo r die Normale an die Oberfläche bedeutet, und ϱ die Entfernung von einem äussern Punkt. Demnach wird

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\alpha do = -4\pi A,$$

und ebenso $$\int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\beta do = -4\pi B.$$

Folglich liefern die Gleichungen (7) die Bedingungen

(9) $$-4\pi\varkappa A = -kqn = -k'q'n' = 4\pi\varkappa B,$$

und zwar ist dies der Werth der Stromstärke in dem Draht, den wir mit J bezeichnen wollen. Er wird bestimmt durch die Gleichung (6); denn diese giebt, wenn l und l' die Längen der beiden Drahtstücke sind,

$$-nl - n'l' - \frac{A}{E_\alpha} -$$

Drücken wir also die vier Constanten A, B, n, n' durch J aus, so folgt

$$J = \frac{\Delta}{\frac{l}{kq} + \frac{l'}{k'q'} + \frac{1}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} - \frac{2}{\varrho}\right)}. \tag{10}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Die Oberflächen gleicher Spannung in dem unbegrenzten Leiter werden durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{1}{E_{\alpha,p}} - \frac{1}{E_{\beta,p}} = \text{const.};$$

die rechtwinkligen Trajectorien derselben sind die Strömungscurven.

Der Ausdruck (10) für J erinnert an den für die Stromstärke in einem linearen Leiter; im Nenner steht die Summe von den Widerständen der beiden Drahtstücke und das dritte Glied

$$\frac{1}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} - \frac{2}{\varrho}\right),$$

welches den Widerstand des unbegrenzten Leiters bedeutet. In diesem letztern Ausdruck wird das Glied $\frac{2}{\varrho}$ neben den beiden andern verschwindend klein sein; wir erhalten daher für den Widerstand des unbegrenzten Leiters den Werth

$$\frac{1}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta}\right).$$

Wir könnten die Formeln etwa auf eine Telegraphenleitung zur Anwendung bringen; aber wir werden so für die Leitungsfähigkeit $\varkappa$ der Erde keinen brauchbaren Werth finden; statt der von uns angenommenen Kugeln mit den Halbmessern R_α und R_β wird die leitende Verbindung durch Platten hergestellt; der Factor $\frac{1}{R_\alpha}$ und $\frac{1}{R_\beta}$ wäre also durch einen andern Ausdruck zu ersetzen. Dessen numerischer Werth möchte schwer zu bestimmen sein, und das ganze Glied, welches den Widerstand der Erde ausdrückt, wird überhaupt einen so kleinen Werth haben, dass er innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler liegt. Wir haben nicht die rechten Mittel ergriffen, um eine solche Aufgabe zu lösen; wir werden dieselbe später behandeln.

§. 84.

Fall einer leitenden Kugel.

Wir wollen nun einen wirklich realisirbaren Fall annehmen, nämlich die Strömung der Elektricität in einer leitenden Kugel suchen, ohne über die Dimensionen derselben irgendwelche Voraussetzung zu machen. Wie in dem eben betrachteten Fall, seien zwei Punkte α und β der Kugeloberfläche durch den Draht $\alpha\beta$ verbunden und an der Stelle γ des letztern die elektromotorische Kraft Δ wirksam.

Wir haben bei derselben Bezeichnung, wie oben, für die Spannung u die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

welche Gleichung wir zur Abkürzung schreiben:

$$\delta u = 0. \tag{11}$$

Ebenso gelten für v und v' die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v'}{\partial s^2} = 0.$$

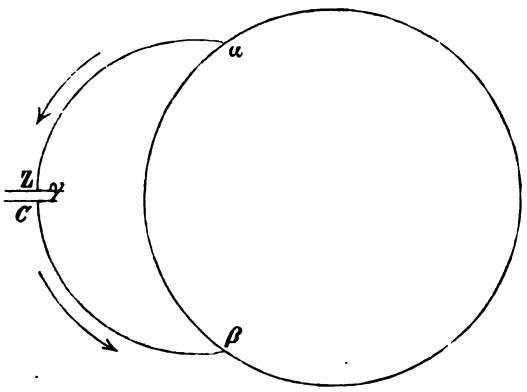


Fig. 57.

Ferner geben die Bedingungen (2) an den Grenzstellen, wenn wir jetzt die Berührungsflächen an den Stellen α und β, welche in der Kugelfläche liegen sollen, mit ω und ω' bezeichnen, mit r aber den Abstand vom Kugelmittelpunkt,

$$-\varkappa \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\alpha \omega = -kq \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_\alpha = -k'q' \left(\frac{\partial v'}{\partial s}\right)_\beta = \varkappa \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\beta \omega'. \tag{12}$$

Die Grenzbedingungen (3) liefern wieder

$$v_\alpha - u_\alpha + v_\gamma' - v_\gamma + u_\beta - v_\beta' = \Delta. \tag{13}$$

Endlich muss für jede Stelle der Kugeloberfläche, die Berührungsstellen α und β ausgenommen, die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{14}$$

v und v' werden also wieder lineare Functionen von s, ihre Abgeleiteten nach s constant, und wenn diese wieder mit n und n' bezeichnet werden, mit J die Stromstärke in der Kette, so ist

$$J = -kqn = -k'q'n', \tag{15}$$

womit n und n' durch J ausgedrückt sind.

§. 85.

Einführung der charakteristischen Function.

Bevor wir auf die Bestimmung von u in unserm Falle näher eingehen, wollen wir eine allgemeinere Aufgabe besprechen; die vorliegende wird dann ein einfaches Beispiel sein.

Es sei eine Function u mit den folgenden Eigenschaften zu be-

[illegible] eines gegebenen Raumes gelte die Gleichung

$$\delta u = 0;$$

ferner sei an jeder Stelle der Oberfläche der Werth von $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeben, wo n die Normale nach Aussen bezeichne, also

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = F, \tag{b}$$

wo F eine Function der Stelle auf der Oberfläche ist.

Diese Aufgabe kann auf die Bestimmung eines Doppelintegrales zurückgeführt werden, mittelst einer Hilfsfunction Ω; bezeichnet nämlich K eine Constante, do ein Element der Oberfläche, so kann gesetzt werden

$$u = K + \frac{1}{4\pi}\int \Omega \overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\, do, \tag{c}$$

wo das Integral über die ganze Oberfläche auszudehnen ist. Die Function u ist durch die beiden Bedingungen überhaupt nur bis auf eine Constante bestimmt.

Die Function Ω hat verschiedene Form für verschiedene Oberflächen; dagegen ist sie für eine bestimmte Oberfläche bis auf eine willkürliche Constante völlig bestimmt; wir wollen sie die charakteristische Function für die Oberfläche nennen. Ist dieselbe gefunden, so ist, welches auch die Oberflächenwerthe F sein mögen, u für den betreffenden Raum bestimmt.

Und zwar ist Ω eine Function von sechs Elementen, den Coordinaten zweier Punkte

$$(x, y, z) \quad \text{und} \quad (\alpha, \beta, \gamma);$$

der Einfachheit wegen wollen wir diese Punkte x und α nennen und ihre Entfernung mit $E_{x,\alpha}$ bezeichnen. Wir setzen

$$\Omega = \frac{1}{E_{x,\alpha}} + \Omega', \tag{A}$$

und stellen an Ω' als Function von α, β, γ die Bedingung, dass für jeden innern Punkt die Gleichung gelte

$$\delta\Omega' = 0. \tag{B}$$

Somit ist Ω' als Function von α, β, γ ein Potential äusserer Massen. Endlich sei an der Oberfläche

$$\overline{\frac{\partial \Omega}{\partial n}} = C, \tag{C}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Die Function Ω sei für die gegebene Oberfläche gefunden. Nun gilt die Gleichung

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}\right) \Omega\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma =$$

$$= \int \overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\, \overline{\Omega}\, do - \int \overline{u} \overline{\frac{\partial \Omega}{\partial n}}\, do + \iiint \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \gamma^2}\right) u\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

wo u als Function der Variabeln α, β, γ angenommen ist, und wo die dreifachen Integrale über den gegebenen Raum, die beiden andern Integrale über alle Elemente do der Oberfläche zu nehmen sind; die Gleichung gilt allgemein, wenn u und Ω als Functionen von α, β, γ in dem betrachteten Raume stätig sind. Nun soll u der Gleichung (a) Genüge leisten; dann verschwindet das dreifache Integral links. Ferner nimmt das dreifache Integral rechts, weil das erste Glied von Ω, $\frac{1}{E_{x,\alpha}}$, für den innern Punkt

$$\alpha = x, \quad \beta = y, \quad \gamma = z,$$

unstätig wird, den Werth an

$$\int\int\int \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{E_{x,\alpha}}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{E_{x,\alpha}}}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{E_{x,\alpha}}}{\partial \gamma^2} \right\} u \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = -4\pi u,$$

wo rechts unter u sein Werth an der Stelle x, y, z verstanden ist. Folglich erhalten wir

$$4\pi u = \int \frac{\overline{\partial u}}{\partial n} \overline{\Omega} \, do - \int \bar{u} \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n} \, do,$$

oder, da nach Gleichung (C) $\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n}$ den constanten Werth C annimmt, $\int \bar{u} \, do$ aber einen bestimmten, von x völlig unabhängigen Werth erhält,

$$u = K + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\overline{\partial u}}{\partial n} \overline{\Omega} \, do,$$

wo K eine Constante bedeutet, und das ist die Gleichung (c). Sie liefert den Werth u in dem beliebigen innern Punkt x, y, z, wenn der Werth $\frac{\overline{\partial u}}{\partial n}$ an der Oberfläche gegeben ist. Mithin wird die vorliegende Aufgabe durch Bestimmung der charakteristischen Function für die Oberfläche gelöst.

Aus den Gleichungen folgt sofort, dass nur eine einzige Function u denselben Genüge leistet. Denn nehmen wir an, es gebe zwei solcher Functionen, u und u', so leistet ihre Differenz

$$v = u - u'$$

den Gleichungen Genüge

$$\delta v = 0, \quad \frac{\overline{\partial v}}{\partial n} = 0;$$

dann giebt aber die Gleichung (c)

$$v = K,$$

d. h. die beiden Lösungen können nur um eine Constante verschieden sein.

Ebenso giebt es nur eine einzige Function Ω für jede Oberfläche. Denn gäbe es deren zwei, Ω und Ω_1, so müsste sein

$$u = K + \frac{1}{4\pi}\int \overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\,\overline{\Omega}\,do,$$

$$u = K_1 + \frac{1}{4\pi}\int \overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\,\overline{\Omega}_1\,do,$$

folglich

$$K_1 - K = \frac{1}{4\pi}\int \overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\,(\overline{\Omega} - \overline{\Omega}_1)\,do.$$

Diese Gleichung soll für beliebig gegebene Grenzwerthe $\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}$ bestehen; folglich muss $\overline{\Omega} - \overline{\Omega}_1$ von x, y, z unabhängig sein, also constant. Und dann ergiebt sich weiter, wie oben, dass die Functionen Ω und Ω_1 überhaupt nur um eine Constante von einander verschieden sein können.

§. 86.

Allgemeine Lösung des Problems.

Wir können jetzt die vorliegende Aufgabe ganz allgemein lösen, unter der Voraussetzung, dass die charakteristische Function für die betreffende Oberfläche bekannt sei. Der leitende Körper habe beliebige Gestalt; das Wesentliche ist, dass nur ein Ein- und ein Ausströmungspunkt vorhanden sein sollen, und dass im Körper selbst nicht der Sitz einer elektromotorischen Kraft sein darf.

Wir setzen

$$u = \beta_1 u^{(1)} - \beta_2 u^{(2)};$$

für jede Stelle im Innern des Körpers sei

$$\delta u^{(1)} = 0, \qquad \delta u^{(2)} = 0;$$

ferner sei an der Oberfläche

$$\overline{\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}} = 0$$

mit Ausnahme der Stelle α, wo der Werth eins sein soll, und ebenso

$$\overline{\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}} = 0$$

mit Ausnahme der Stelle β, wo der Werth wieder eins sei. Dann sind nach dem Obigen die Grössen $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ völlig bestimmt, also auch ihre Werthe an der Oberfläche gegeben.

Weiter liefern die Gleichungen (12), (13) und (15) die folgenden Bedingungen:

$$J = -\varkappa\omega\beta_1 = -kqn = -k'q'n' = -\varkappa\omega'\beta_2,$$

$$\Delta = -nl - n'l' - \beta_1 u_\alpha^{(1)} + \beta_2 u_\alpha^{(2)} + \beta_1 u_\beta^{(1)} - \beta_2 u_\beta^{(2)},$$

und somit ergiebt sich, indem wir die Werthe der Constanten mittelst der ersteren Gleichung durch J ausdrücken,

$$J = \frac{\Delta}{\frac{l}{kq} + \frac{l'}{k'q'} + \frac{u_\alpha^{(1)}}{\varkappa\omega} - \frac{u_\alpha^{(2)}}{\varkappa\omega'} - \frac{u_\beta^{(1)}}{\varkappa\omega} + \frac{u_\beta^{(2)}}{\varkappa\omega'}}.$$

Wir brauchen endlich nur noch die Ausdrücke für $u^{(1)}$ und für $u^{(2)}$ aufzustellen. Hiebei nehmen wir an, es seien die beiden Berührungsflächen ω und ω' so klein, dass wir die Function Ω für eine jede derselben als constant ansehen dürfen; wir haben dann, bei Benutzung der oben gebrauchten Bezeichnung,

$$u^{(1)} = K + \frac{1}{4\pi}\omega\Omega_{\alpha,p},$$

$$u^{(2)} = K' + \frac{1}{4\pi}\omega'\Omega_{\beta,p}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$u_\alpha^{(1)} - u_\beta^{(1)} = \frac{\omega}{4\pi}(\Omega_{\alpha,\alpha} - \Omega_{\alpha,\beta}),$$

$$u_\alpha^{(2)} - u_\beta^{(2)} = \frac{\omega'}{4\pi}(\Omega_{\beta,\alpha} - \Omega_{\beta,\beta}).$$

Indem wir diese Werthe einsetzen, erhalten wir schliesslich:

$$(16) \qquad J = \frac{\Delta}{\frac{l}{kq} + \frac{l'}{k'q'} + \frac{1}{4\pi\varkappa}\{\Omega_{\alpha,\alpha} - \Omega_{\alpha,\beta} - \Omega_{\beta,\alpha} + \Omega_{\beta,\beta}\}}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Stromstärke durch die charakteristische Function; das dritte Glied im Nenner

$$(17) \qquad W = \frac{1}{4\pi\varkappa}\{\Omega_{\alpha,\alpha} - \Omega_{\alpha,\beta} - \Omega_{\beta,\alpha} + \Omega_{\beta,\beta}\}$$

drückt den Widerstand des Körpers aus.

§. 87.

Directe Ableitung des Ausdrucks für den Widerstand.

Wir können diesen Werth auch ganz direct bestimmen. Ist ein Strom zwischen den Punkten β und α beliebig verzweigt, so ist der Gesammtwiderstand

$$W = \frac{1}{\sum\frac{1}{w}},$$

wo im Nenner die Summe von den reciproken Widerständen der Zweige steht. Diese Zweige sind in unserm Falle die sämmtlichen Strömungscanäle, welche im Innern des Körpers von β nach α können construirt werden. Das Längenelement eines solchen Canales sei dn, sein Querschnitt $d\omega$; dann wird sein Widerstand

$$\int_\beta^\alpha \frac{dn}{\varkappa d\omega} = \frac{1}{\varkappa}\int_\beta^\alpha \frac{dn}{d\omega}.$$

Bezeichnet aber γ die Elektricitätsmenge, welche während der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Canales geht, so ist γ für diesen Canal constant, und wir haben

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = \gamma$$

oder

$$\varkappa\, du = -\gamma \frac{dn}{d\omega};$$

folglich

$$\int_\beta^\alpha \frac{dn}{d\omega} = -\frac{\varkappa}{\gamma}(u_\alpha - u_\beta).$$

Hierin können wir γ mittelst der ersten Gleichung wieder durch das Element $d\omega$ einer Oberfläche von constanter Spannung und durch den Werth von $\frac{\partial u}{\partial n}$ an der betreffenden Stelle ausdrücken; wir finden so

$$\int_\beta^\alpha \frac{dn}{d\omega} = \frac{(u_\alpha - u_\beta)\frac{\partial u}{\partial n}}{d\omega},$$

und demnach wird der reciproke Widerstand des betreffenden Canales dargestellt durch

$$\frac{\varkappa\, d\omega}{(u_\alpha - u_\beta)\frac{\partial u}{\partial n}}.$$

Die Summe von den reciproken Widerständen der sämmtlichen Canäle ist gleich dem Integral, genommen über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche constanter Spannung; folglich erhalten wir

$$\frac{1}{W} = \frac{\varkappa}{u_\alpha - u_\beta} \int \frac{\partial u}{\partial n} d\omega.$$

Hierin bezeichnet $d\omega$ das Element und dn die Normale irgend einer Oberfläche von constanter Spannung, und das Integral muss denselben Werth haben, über welche dieser Oberflächen dasselbe auch mag erstreckt werden. Dies folgt übrigens unmittelbar daraus, dass das Integral verschwindet, wenn dasselbe über eine beliebige geschlossene Oberfläche im Innern des leitenden Körpers erstreckt wird (S. 223).

Zu den Oberflächen constanter Spannung gehören in unserm Falle die Berührungsflächen ω und ω'; nehmen wir das Integral über diese Flächen, so folgt

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = \beta_1 \omega = \beta_2 \omega';$$

ferner, wenn wir den Werth von u auch in den Factor einsetzen,

$$W = \frac{1}{\varkappa} \frac{\beta_1 u_\alpha^{(1)} - \beta_2 u_\alpha^{(2)} - \beta_1 u_\beta^{(1)} + \beta_2 u_\beta^{(2)}}{\beta_1 \omega}$$

und dies führt wieder zu dem Ausdruck (17).

§. 88.

Bestimmung der charakteristischen Function für die Kugel.

Um den einfachsten Fall durchzuführen und zugleich eine praktisch sehr wichtige Aufgabe zu lösen, bestimmen wir die charakteristische Function für die Kugel.

Die Function Ω wird durch die drei Gleichungen definirt:

(A) $$\Omega = \frac{1}{E_{\alpha,x}} + \Omega',$$

(B) $$\delta\Omega' = 0,$$

(C) $$\frac{\overline{\partial\Omega}}{\partial n} = C.$$

Wir führen Kugelcoordinaten ein: (r, m, p) für den Punkt x, (ϱ, μ, φ) für den Punkt α; ferner sei der Halbmesser der Kugel gleich R.

Wir entwickeln nach Kugelfunctionen; dabei ist zu beachten, dass die Function Ω nur für Punkte α auf der Kugeloberfläche gebraucht wird, während x innerhalb der Kugel liegen soll; folglich haben wir zu setzen

$$\frac{1}{E_{\alpha,x}} = \frac{1}{\varrho} Q^{(0)} + \frac{r}{\varrho^2} Q^{(1)} + \frac{r^2}{\varrho^3} Q^{(2)} + \ldots + \frac{r^n}{\varrho^{n+1}} Q^{(n)} + \ldots$$

und

$$\Omega' = V^{(0)} + \varrho V^{(1)} + \varrho^2 V^{(2)} + \ldots + \varrho^n V^{(n)},$$

indem Ω', betrachtet als Function der Stelle α, ein Potential äusserer Massen ist. Werden diese Werthe in die Gleichung (C) eingesetzt, so ergiebt sich

$$C = V^{(1)} + 2R V^{(2)} + \ldots + nR^{(n-1)} V^{(n)} -$$

$$- \frac{1}{R^2} Q^{(0)} - \frac{2r}{R^3} Q^{(1)} - \frac{3r^2}{R^4} Q^{(2)} - \ldots - (n+1)\frac{r^n}{R^{n+2}} Q^{(n)} - \ldots.$$

Die Reihe kann nur constant sein, wenn die Glieder mit denselben Kugelfunctionen verschwinden. Dies giebt die Gleichungen

$$C = -\frac{1}{R^2} Q^{(0)},$$

$$V^{(1)} = \frac{2}{1}\frac{1}{R^3} Q^{(1)}, \qquad V^{(2)} = \frac{3}{2}\frac{r^2}{R^5} Q^{(2)}, \ldots \ldots V^{(n)} = \frac{n+1}{n}\frac{r^n}{R^{2n+1}} Q^{(n)}, \ldots$$

Folglich wird

$$\Omega' = V^{(0)} + \frac{2}{1}\frac{\varrho r}{R^3} Q^{(1)} + \frac{3}{2}\frac{\varrho^2 r^2}{R^5} Q^{(2)} + \ldots + \frac{n+1}{n}\frac{\varrho^n r^n}{R^{2n+1}} Q^{(n)} + \ldots$$

Diese Reihe lässt sich summiren. Zu dem Ende betrachten wir die Reihe für die reciproke Entfernung zwischen einem äussern Punkt ϱ_1 und einem innern Punkt r,

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{\varrho_1} Q^{(0)} + \frac{r}{\varrho_1^2} Q^{(1)} + \frac{r^2}{\varrho_1^3} Q^{(2)} + \ldots + \frac{r^n}{\varrho_1^{n+1}} Q^{(n)} + \ldots,$$

und setzen hierin $\varrho_1 = \frac{R^2}{\varrho}$; wir erhalten

$$\frac{1}{E_1} = \frac{\varrho}{R^2} Q^{(0)} + \frac{\varrho^2 r}{R^4} Q^{(1)} + \frac{\varrho^3 r^2}{R^6} Q^{(2)} + \ldots + \frac{\varrho^{n+1} r^n}{R^{2n+2}} Q^{(n)} + \ldots$$

Andrerseits ist

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \varrho} = 2\frac{r}{R^3} Q^{(1)} + 3\frac{\varrho r^2}{R^5} Q^{(2)} + \ldots + (n+1)\frac{\varrho^{n-1} r^n}{R^{2n+1}} Q^{(n)} + \ldots;$$

folglich, da $Q^{(0)} = 1$ ist,

$$\frac{\varrho}{R}\frac{\partial \Omega'}{\partial \varrho} = \frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{1}{E_1} - \frac{1}{R^2},$$

oder

$$\Omega' = \frac{R}{\varrho E_1} - \frac{\log \varrho}{R} + R\int \frac{d\varrho}{\varrho^2 E_1}.$$

Wir können endlich setzen

$$E_1 = \sqrt{\frac{R^4}{\varrho^2} + r^2 - 2\frac{R^2}{\varrho} r\cos\vartheta},$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, welchen die Richtungen r und ϱ einschliessen, und das Integral ausführen; es folgt dann

$$\Omega' = \frac{R}{\sqrt{R^4 + r^2\varrho^2 - 2R^2 r\varrho\cos\vartheta}} - \frac{1}{R}\log\frac{\sqrt{R^4 + r^2\varrho^2 - 2R^2 r\varrho\cos\vartheta} + R^2 - r\varrho\cos\vartheta}{R^2}.$$

Hieraus folgt endlich, indem wir $\varrho = R$ setzen und $\frac{1}{E}$ hinzufügen, der gesuchte Werth der charakteristischen Function für die Oberfläche der Kugel:

$$(18)\quad \Omega = \frac{2}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}} - \frac{1}{R}\log\frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta} + R - r\cos\vartheta}{R}.$$

Damit können wir die elektrische Spannung in einer leitenden Kugel bestimmen, wenn ein Strom J an der Stelle β ein- und an der Stelle α austritt. Lassen wir die willkürliche Constante fort, so ist

$$u = -\frac{J}{4\pi\varkappa}(\Omega_{\alpha,x} - \Omega_{\beta,x});$$

mit Benutzung der eben gefundenen Werthes ergiebt sich also

$$(19)\quad u = -\frac{J}{4\pi\varkappa}\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(R_\alpha, r)}} - \frac{2}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(R_\beta, r)}} \\ -\frac{1}{R}\log\frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(R_\alpha, r)} + R - r\cos(R_\alpha, r)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(R_\beta, r)} + R - r\cos(R_\beta, r)}, \end{array}\right.$$

worin R_α und R_β die Richtungen der Halbmesser nach den Punkten α und β bezeichnen.

Mittelst dieser Gleichung wird der Werth von u für jeden Punkt im Innern und an der Oberfläche der Kugel bestimmt, mit Ausnahme der beiden Stellen α und β. Denn für

$$r = R, \qquad \cos(R_\alpha, r) = 1 \quad \text{oder} \quad \cos(R_\beta, r) = 1$$

wird der Werth von u nach der Gleichung unendlich. Ferner muss, damit u völlig bekannt sei, die Stromstärke J mittelst der Gleichung (16) bestimmt werden. In dieser Gleichung treten aber die Ausdrücke $\Omega_{\alpha,\alpha}$ und $\Omega_{\beta,\beta}$ auf, welche ebensowenig wie die Grösse u an den Stellen α und β, durch die abgeleitete Formel (18) gegeben sein können; denn es folgen unendliche Werthe.

§. 89.

Die Bedeutung der Ausdrücke $\Omega_{\alpha,\alpha}$, $\Omega_{\beta,\beta}$.

Diesen Punkt müssen wir noch eingehend erörtern. Die elektrische Spannung u kann an den Stellen α und β nicht unendlich oder unbestimmt werden; wir müssen also eine Annahme gemacht haben, welche die unmittelbare Anwendung der Formeln auf solche Fälle ausschliesst. Und das entdecken wir leicht, wenn wir auf die oben angestellte Rechnung zurückblicken; wir haben nämlich vorausgesetzt, es sei

$$\int \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\,\bar{\Omega}\,do = \omega\,\Omega_{\alpha,x},$$

weil $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}$ für alle Punkte der Oberfläche verschwinden sollte mit Ausnahme der kleinen Fläche α, wo der Werth 1 vorgeschrieben war. Aber dies kann nur für Stellen x gelten, welche in endlicher Entfernung von der Stelle α liegen, genauer ausgedrückt in grosser Entfernung im Vergleich mit den Dimensionen der Fläche ω. Wenden wir also die Formel auch in dem Falle an, wo die Stelle x mit α zusammenfällt, so bedeutet der Ausdruck $\Omega_{\alpha,\alpha}$, ebenso in dem andern entsprechenden Falle $\Omega_{\beta,\beta}$, einen durch die obigen Formeln nicht bestimmten Werth.

Wir suchen nun diese Werthe auf und setzen der Einfachheit wegen

$$\omega = \omega' = q = q', \qquad k = k';$$

dann haben wir

$$J = \frac{kq\Delta}{l + l' + \frac{2k}{\varkappa}\left(u_\alpha^{(1)} - u_\beta^{(1)}\right)}, \tag{20}$$

wo

$$u^{(1)} = K + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\,\Omega\,do.$$

Nun verschwindet $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}$ überall, mit Ausnahme der kleinen Fläche ω, wo sein Werth eins sein soll. Folglich können wir setzen

$$u^{(1)} = K + \frac{1}{4\pi}\int \Omega\,do,$$

und wir haben dann das Integral nur über die Fläche ω auszudehnen.

Wir sollen die Werthe von $u^{(1)}$ an den Stellen α und β berechnen. Zunächst nehmen wir an, die Stelle x, y, z liege auf der Oberfläche der Kugel, und der Halbmesser nach x, y, z bilde mit dem nach der Stelle α den Winkel ϑ; dann ist

$$u^{(1)} = K + \frac{1}{4\pi R}\int\left\{\frac{2}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} - \log\left[\sqrt{2(1-\cos\vartheta)} + 1 - \cos\vartheta\right]\right\} do,$$

mithin, sobald der Winkel ϑ nicht sehr klein ist,

$$u^{(1)} = K + \frac{\omega}{4\pi R}\left\{\frac{2}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} - \log\left[\sqrt{2(1-\cos\vartheta)} + 1 - \cos\vartheta\right]\right\}.$$

Wenn aber der Punkt (x, y, z) in die Fläche ω fällt, so wird der Winkel sehr klein, und es tritt eine wesentliche Schwierigkeit auf, welche wir von unserm Standpunkte aus nicht zu beseitigen vermögen. Die Spannung u hat nämlich in Wirklichkeit verschiedenen Werth an verschiedenen Stellen der Fläche ω, während wir in jedem Querschnitt des Drahtes die Spannung constant gesetzt haben; in der Berührungsfläche finden nothwendig auch seitliche Strömungen statt. Wollten wir diese berücksichtigen, so erhielten wir ein Problem höherer Ordnung. Wir helfen uns damit, dass wir den Querschnitt sehr klein setzen; es reicht dann ein angenähert richtiger Werth aus; derselbe ist verwendbar, wenn die Fläche ω im Vergleich mit der ganzen Kugelfläche sehr klein ist.

Wir führen für die Stelle x, y, z die Kugelcoordinaten μ, φ ein und drücken auch das Oberflächenelement do in Kugelcoordinaten (μ_1, φ_1) aus. Wir haben dann

$$\cos\vartheta = \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi - \varphi_1),$$
$$do = -R^2 d\mu_1\, d\varphi_1;$$

die Axe der Kugelcoordinaten soll durch den Mittelpunkt der kreisförmigen Berührungsfläche ω gehen. Setzen wir weiter

$$\mu^2 = 1 - m^2, \qquad \mu_1^2 = 1 - m_1^2,$$

so sind m, m_1 die Sinus sehr kleiner Winkel, und zwar seien diese Sinus so klein, dass wir die höheren Potenzen neben niedrigern vernachlässigen dürfen. Dann wird

$$\mu = 1 - \frac{m^2}{2}, \qquad \mu_1 = 1 - \frac{m_1^2}{2},$$
$$do = R^2 m_1\, dm_1\, d\varphi_1,$$
$$2(1-\cos\vartheta) = m^2 + m_1^2 - 2mm_1\cos(\varphi - \varphi_1).$$

Ferner ergiebt sich

$$\log\left\{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)} + 1 - \cos\vartheta\right\} =$$
$$= \log\sqrt{2(1-\cos\vartheta)} + \log\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{\cos\vartheta}{2}}\right\}$$
$$= \log\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}.$$

Bezeichnen wir den angularen Halbmesser der Kreisfläche ω mit M, so haben wir demnach

$$u^{(1)} = K + \int_0^{2\pi}\int_0^{M}\left\{\frac{2}{\sqrt{m^2+m_1^2-2mm_1\cos(\varphi-\varphi_1)}} - \frac{1}{2}\log\left[m^2+m_1^2-2mm_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right]\right\}m_1\,dm_1\,d\varphi_1,$$

wo im Allgemeinen $0 < m < M$.

Wir finden den Werth der Integrale am Bequemsten, indem wir nach Cosinus der Vielfachen von $(\varphi - \varphi_1)$ entwickeln; denn es verschwinden dann alle Glieder mit einem Cosinus, weil das Integral in Bezug auf φ_1 von 0 bis 2π zu nehmen ist. Allein wir müssen bei dieser Entwickelung unterscheiden, ob $m_1 < m$ oder $m_1 > m$, indem einmal nach steigenden, das andere Mal nach fallenden Potenzen von $\left(\frac{m_1}{m}\right)$ zu entwickeln ist. Wir erhalten auf diesem Wege, da das von $(\varphi - \varphi_1)$ unabhängige Glied in der Entwickelung der reciproken Wurzelgrösse wird:

$$\frac{1}{m}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{m_1}{m}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{m_1}{m}\right)^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{m_1}{m}\right)^6+\cdots\right\},$$

für das erste Integral den Werth

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{M}\frac{m_1\,dm_1\,d\varphi_1}{\sqrt{m^2+m_1^2-2mm_1\cos(\varphi-\varphi_1)}} =$$

$$= -4\pi m\left\{\frac{1}{2}-\frac{1+4}{1.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3+6}{3.6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2-\frac{5+8}{5.8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2-\cdots\right\}$$

$$+4\pi M\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{m}{M}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{m}{M}\right)^4-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{m}{M}\right)^6-\cdots\right\},$$

und für das zweite

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{M}\log\left[m^2+m_1^2-2mm_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right]m_1\,dm_1\,d\varphi_1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{M^2(2\log M-1)+m^2\right\}.$$

Folglich wird

$$u^{(1)} = K - mR\left\{\frac{1}{2}-\frac{1+4}{1.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3+6}{3.6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2-\frac{5+8}{5.8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2-\cdots\right\}$$

$$+MR\left\{1-\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{m}{M}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{m}{M}\right)^4-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{m}{M}\right)^6-\cdots\right\}$$

$$-\frac{R}{8}\left\{M^2(2\log M-1)+m^2\right\}.$$

Demnach finden wir für $u^{(1)}$ einen Werth, welcher von φ und wir wissen von m nur, dass $0 < m < M$. Damit erl endlich viele Werthe.

Wir setzen in unsre Formeln für $u_\alpha^{(1)}$ den Mittelwerth ein,

$$u^{(1)} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{M} u^{(1)}\, m\, dm\, d\varphi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{M} m\, dm\, d\varphi};$$

es ergiebt sich auf diesem Wege

$$u^{(1)} = MR\left\{\frac{8}{3\pi} - \frac{M}{16}(4\log M - 1)\right\}, \tag{21}$$

indem wir die bekannte Entwicklung beachten

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \ldots.$$

Setzen wir endlich diesen Werth von $u_\alpha^{(1)}$ und den bekannten von $u_\beta^{(1)}$ in die Gleichung (20) ein, so folgt

$$J = \frac{kq\Delta}{l + l' + \frac{2k}{\varkappa}RM\left\{\frac{8}{3\pi} - \frac{M}{16}(4\log M - 1) - \frac{M}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} - \frac{1}{2}\log\left\{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)} + 1 - \cos\vartheta\right\}\right]\right\}}, \tag{22}$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, welchen die Halbmesser R_α und R_β mit einander bilden.

Nehmen wir an, es sei M eine sehr kleine Grösse, wie dies zutrifft, wenn wir die Erde als leitende Kugel benutzen, so kann im Nenner das mit M^2 multiplicirte Glied vernachlässigt werden. Es ist dann

$$J = \frac{kq\Delta}{(l+l')\left\{1 + \frac{16kRM}{3\pi\varkappa(l+l')}\right\}}. \tag{23}$$

Der Werth ist durchaus nicht streng abgeleitet. Die Unsicherheit verschwindet nur, wenn RM gegen $(l + l')$ klein ist; dann verschwindet das zweite Glied im Nenner gegen das erste, d. h. der Widerstand der Kugel ist neben dem der Kette zu vernachlässigen.

§. 90.

Bestimmung der Leitungsfähigkeit der Erde.

Hieraus erhellt, dass man auf Grund der Gleichungen (23) oder (22) die Leitungsfähigkeit $\varkappa$ nicht mit Genauigkeit bestimmen kann. Vielmehr muss man zu diesem Behuf eine andere Einrichtung treffen.

Wir denken uns neben den Stellen α und β noch zwei andere, a und b, durch einen Draht verbunden, in welchem keine elektromotorische Kraft thätig ist. Dann wird ein Theil der Elektricität statt durch die Kugel durch den Draht ab strömen, und indem man die Stromstärke in dem Draht ab mit der in $\alpha\beta$ vergleicht, gelangt man ziemlich einfach zu einer Bestimmung von $\varkappa$.

Man nennt den Draht ab, welcher um die Stromstärke zu messen mit einem Multiplicator in Verbindung gesetzt ist, den Prüfungsdraht. Mit einer Kugel sind noch keine Messungen angestellt, obschon solche nicht mehr Schwierigkeiten bieten, als die von Kirchhoff mit einer Scheibe angestellten.

Wir denken uns zunächst den Punkt a fest, und verschieben b so lange, bis in dem Draht ab kein Strom auftritt; dann liegen die Punkte a und b in derselben Spannungsfläche. So kann durch Beobachtung die ganze Schnittcurve einer Spannungsfläche mit der Oberfläche der Kugel verfolgt werden, und diese Curven werden mit grosser Genauigkeit erhalten, da, je nachdem der Berührungspunkt auf der einen oder auf der andern Seite der Curve liegt, der in ab auftretende Strom entgegengesetzte Richtung hat. Wird eine Metallkugel benutzt, so kann die Berührung in a und in b durch Nadelspitzen bewirkt werden; die Curven werden dann sehr scharf erhalten; allerdings muss die Kugel doch mindestens einen halben Fuss Durchmesser haben, und das ist vielleicht der Grund, dass bis jetzt keine Beobachtungen sind angestellt worden.

Liegen die beiden Punkte a und b nicht in derselben Spannungsfläche, so fliesst ein Strom durch den Draht ab, und das ganze System der Strömungscurven im Innern der Kugel erleidet dadurch eine Aenderung. Wir verfolgen diesen Fall weiter, weil man durch Messung der Stromstärke zu einer Bestimmung von $\varkappa$ gelangt; die Methode verspricht namentlich für den Fall von sogenannten Nichtleitern grossen Nutzen; man hat noch keinen numerischen Werth für irgend einen derselben. Im Falle einer Anwendung auf die Erde muss beachtet werden, dass diese nicht homogen ist, dass man also nur eine Art von Mittelwerth erhält, und zwar wird dieser Werth durch die Ausmündungsstellen vorzugsweise bedingt.

Die dem Drahte ab entsprechenden Grössen seien

$$k_2,\quad q_2,\quad l_2,\quad v_2$$

und die Grössen der Berührungsflächen in a und b

$$\omega_3 \text{ und } \omega_4.$$

Wir haben dann die Gleichungen:

$$\delta u = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v'}{\partial s^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v_2}{\partial s^2} = 0;$$

$$-\varkappa\omega\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -kq\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) = -k'q'\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) = \varkappa\omega'\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\beta;$$

$$-\varkappa\omega_3\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -k_2q_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial s}\right) = \varkappa\omega_4\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_b.$$

Weiter folgt:

$$A = -(u_a - u_\beta + nl + n'l'),$$

$$0 = -(u_a - u_b + n_2l_2),$$

wenn $$\frac{\partial v}{\partial s} = n, \qquad \frac{\partial v'}{\partial s} = n', \qquad \frac{\partial v_2}{\partial s} = n_2$$

gesetzt wird. Wir bezeichnen die Stromstärke in dem Prüfungsdraht mit J_1 und rechnen dieselbe positiv von a nach b. Dann ist

$$J_1 = -\varkappa\omega_3\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -k_2 q_2 n_2 = \varkappa\omega_4\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_b,$$

wie in dem Draht $\alpha\beta$

$$J = -\varkappa\omega\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\alpha = -kqn = -k'q'n' = \varkappa\omega'\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\beta.$$

Endlich soll für alle Stellen der Oberfläche, mit Ausnahme von α, β, a und b, die Abgeleitete von u nach der Normale verschwinden

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Wir setzen daher

$$u = \beta_1 u^{(1)} - \beta_2 u^{(2)} + \beta_3 u^{(3)} - \beta_4 u^{(4)},$$

wo die sämmtlichen u der Gleichung genügen sollen

$$\delta u = 0,$$

wo ferner an der Oberfläche sein soll

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = 0 \quad \text{mit Ausnahme der Stelle } \alpha,$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad \text{„ „ „ „ } \beta,$$

$$\frac{\partial u^{(3)}}{\partial n} = 0 \quad \text{„ „ „ „ } a,$$

$$\frac{\partial u^{(4)}}{\partial n} = 0 \quad \text{„ „ „ „ } b,$$

während an den ausgenommenen Stellen der Werth immer eins sein soll. Durch die oben angestellte Rechnung sind dann die $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ bestimmt, bis auf Constanten natürlich, und zur Bestimmung der Grössen β und n haben wir die Gleichungen

$$J = -\varkappa\omega\beta_1 = -kqn = -k'q'n' = -\varkappa\omega'\beta_2,$$

$$J_1 = -\varkappa\omega_3\beta_3 = -k_2 q_2 n_2 = -\varkappa\omega_4\beta_4.$$

Wir können wieder setzen

$$u^{(1)} = K_1 + \frac{\omega}{4\pi}\Omega_{a,x},$$

$$u^{(2)} = K_2 + \frac{\omega'}{4\pi}\Omega_{\beta,x},$$

$$u^{(3)} = K_3 + \frac{\omega_3}{4\pi}\Omega_{a,x},$$

$$u^{(4)} = K_4 + \frac{\omega_4}{4\pi}\Omega_{b,x},$$

und dann folgt

$$u = -\frac{J}{4\pi\varkappa}(\Omega_{\alpha,x} - \Omega_{\beta,x}) - \frac{J_1}{4\pi\varkappa}(\Omega_{a,x} - \Omega_{b,x}),$$

wenn wir die willkührliche Constante weglassen.

Führen wir diesen Werth in die beiden Gleichungen ein, welche zur Bestimmung der Stromstärken dienen, so ergiebt sich

$$\Delta = J\left\{\frac{\Omega_{\alpha,\alpha} + \Omega_{\beta,\beta} - \Omega_{\alpha,\beta} - \Omega_{\beta,\alpha}}{4\pi\varkappa} + \frac{l}{kq} + \frac{l'}{k'q'}\right\} + + J_1\frac{\Omega_{a,\alpha} + \Omega_{b,\beta} - \Omega_{b,\alpha} - \Omega_{a,\beta}}{4\pi\varkappa},$$

$$0 = J\frac{\Omega_{\alpha,a} + \Omega_{\beta,b} - \Omega_{\alpha,b} - \Omega_{\beta,a}}{4\pi\varkappa} + + J_1\left\{\frac{\Omega_{a,a} + \Omega_{b,b} - \Omega_{a,b} - \Omega_{b,a}}{4\pi\varkappa} + \frac{l_2}{k_2 q_2}\right\}.$$

Auch hier sind die Werthe von den Grössen $\Omega_{\alpha,\alpha}$, $\Omega_{\beta,\beta}$, $\Omega_{a,a}$, $\Omega_{b,b}$, wie oben gezeigt worden, zu berechnen. Die Stromstärken J und J_1 sind dann völlig bestimmt.

Soll der Strom in dem Prüfungsdraht verschwinden, so muss

$$\Omega_{\alpha,a} + \Omega_{\beta,b} - \Omega_{\alpha,b} - \Omega_{\beta,a} = 0$$

sein; das ist eben die Bedingung, dass die Stellen a und b in ein- und derselben Spannungsfläche liegen.

Wir wollen die Formeln auf eine Kugel von sehr grossen Dimensionen anwenden, auf die Erde. Wir nehmen weiter an, dass die Stellen α, β, a und b einander sehr nahe liegen, im Vergleich mit dem Halbmesser der Kugel; dann können wir nach Gleichung (18) für die Ausdrücke $\Omega_{\alpha,a}$, u. s. w. die doppelte reciproke Entfernung der Stellen α und a, u. s. w. setzen. Ferner wird der Ausdruck

$$\frac{\Omega_{a,a} + \Omega_{b,b} - \Omega_{a,b} - \Omega_{b,a}}{4\pi\omega}$$

im Vergleich mit $\frac{l_2}{k_2 q_2}$ verschwindend klein sein; die letztere von den beiden Gleichungen giebt somit

$$0 = \frac{J}{2\pi\varkappa}\left\{\frac{1}{E_{\alpha,a}} + \frac{1}{E_{\beta,b}} - \frac{1}{E_{\alpha,b}} - \frac{1}{E_{\beta,a}}\right\} + J_1\frac{l_2}{k_2 q_2},$$

oder

$$\frac{J_1}{J} = -\frac{k_2 q_2}{2\pi\varkappa l_2}\left\{\frac{1}{E_{\alpha,a}} + \frac{1}{E_{\beta,b}} - \frac{1}{E_{\alpha,b}} - \frac{1}{E_{\beta,a}}\right\}. \tag{24}$$

Diese Gleichung ist zur Bestimmung von $\varkappa$ sehr geeignet; denn sie enthält lauter leicht und genau messbare Grössen. Die Stellen α, β, a, b sind in mässigen Entfernungen, einigen hundert Fuss, zu wählen. Man erhält einen Werth für die Leitungsfähigkeit $\varkappa$, der dem Erdboden entspricht, in welchem experimentirt wird. —

Die Aufgabe, welche wir hier für die Kugel durchgeführt haben, kann auch für den Fall einer Kugelschale und für den Raum zwischen zwei confocalen Rotationsellipsoiden gelöst werden; in dem letztern Fall muss die reciproke Entfernung mittelst elliptischer Coordinaten ausgedrückt und dem entsprechend entwickelt werden. Auch für den Grenzfall der Kugel, einen von einer unendlichen Ebene begrenzten Körper, ist die Aufgabe lösbar. Endlich kann die charakteristische Function für ein rechtwinkliges Prisma bestimmt werden.

VII. Kapitel.

Ueber die Strömung der Elektricität in einer Ebene.

§. 91.

Allgemeine Gleichungen für die stationäre Strömung in einer Ebene.

Die im Folgenden anzustellende Untersuchung betrifft eigentlich einen besondern Fall der vorhergehenden, nämlich die Strömung der Elektricität in einem Raum, dessen eine Dimension gegen die beiden andern sehr klein ist, also in einer Platte oder Scheibe. Allein die Differentialgleichungen nehmen in diesem Falle eine andere Form an, und demzufolge wird auch die Integrationsmethode eine wesentlich andere.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung der Strömung in einer ebenen Platte. Dieselbe sei homogen und von constanter Dicke. Wir lassen die (x, y)-Ebene mit der Mittelebene der Platte zusammenfallen, so dass die z-Axe auf der Platte senkrecht steht; die beiden Seitenebenen sind dann

$$z = c \quad \text{und} \quad z = -c,$$

wenn $2c$ die Dicke der Platte bedeutet. Die Grenzen von (x, y) werden durch eine geschlossene Curve bestimmt, den Rand der Platte.

Ferner seien zwei Punkte A und B in der einen Seitenebene der Platte mit einer galvanischen Kette verbunden, während in der Platte selbst keine elektromotorische Kraft wirksam sein soll. Wir werden den Fall behandeln, wo die Punkte A und B im Innern der Platte liegen, in endlicher Entfernung vom Rande; wir können dieselben dann dem Rande beliebig nahe treten lassen.

Bezeichnen wir die elektrische Spannung in dem Punkte (x, y, z) der Platte wieder mit u, so muss dieses u erstens der allgemeinen Differentialgleichung genügen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

ferner den Grenzgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = c$$

mit Ausnahme der Stellen A und B, [illegible]en,

endlich der Gleichung am Rande

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = 0,$$

wo dn die Richtung der Normale an die Randcurve in der $(x,$ Ebene bedeutet.

Wir berechnen den Mittelwerth der Spannung u an den St einer Senkrechten auf die Platte,

$$u' = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} u\,dz.$$

Indem wir die allgemeine Differentialgleichung mit dz multiplici in Bezug auf z von $-c$ bis c integriren und durch $2c$ dividiren, halten wir

$$0 = \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{1}{2c}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_c - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-c}\right\}.$$

Nun ist $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-c}$ immer gleich null, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_c$ auch null, mit Ausnahme Stellen A und B; folglich verschwindet das letzte Glied an allen S len, mit Ausnahme von A und B.

Ausserdem ist am Rande

$$\overline{\frac{\partial u'}{\partial n}} = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\,dz = 0.$$

Schreiben wir also statt u' wieder u, und bezeichnen wir die Mittelwerth als die Spannung u an der Stelle (x, y) der Platte, so für u eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2c}\varphi(x, y) \tag{1}$$

und die Randgleichung

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = 0. \tag{2}$$

In unserm Falle ist die Function $\varphi(x, y)$ nur in den beiden Pu ten A und B von null verschieden, und ihre Werthe β_1 und β_2 wer durch die Gleichungen bestimmt, welche sich auf den Schliessur draht beziehen. Wir haben bei Benutzung der früher gebrauch Bezeichnung:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = n, \qquad \frac{\partial v'}{\partial s} = n',$$

$$-\varkappa\beta_1\omega = -kqn = -k'q'n' = \varkappa\beta_2\omega' = j,$$

$$\Delta = -(u_A - u_B + nl + n'l');$$

j bedeutet die Stromstärke im Schliessungsdraht.

§. 92.

Directe Ableitung der Gleichungen.

Wir wollen noch zeigen, wie man die allgemeine Differentialgleichung für die unendlich dünne Platte direct ableiten kann.

Wir denken uns ein beliebiges Stück aus der Platte ausgeschnitten; ein Element der Grenzcurve sei dp, dn die Normale nach Aussen. Das ausgeschnittene Stück enthalte keinen Ein- oder Ausströmungspunkt; ferner sei die Platte so dünn, dass wir die Spannung an den sämmtlichen Punkten einer Normale auf die Seitenflächen gleich annehmen können. Dann muss in derselben Zeit ebensoviel Elektricität in das Stück ein- wie ausströmen, oder die Summe der ausströmenden Elektricität muss null sein, wenn wir einströmende Mengen negativ nehmen; dies giebt die Bedingung

$$-\varkappa 2c\int\frac{\partial u}{\partial n}\,dp = 0,$$

also

$$\int\frac{\partial u}{\partial n}\,dp = 0,$$

wenn das Integral über die ganze Grenzcurve erstreckt wird.

Nun ist aber nach einem bekannten Satz

$$\int\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy = \int\frac{\partial u}{\partial n}\,dp,$$

wo das Flächenintegral über alle Elemente $dx\,dy$ der von der Curve begrenzten Fläche zu nehmen ist. Das Integral muss verschwinden für jede geschlossene Curve, welche keinen Ein- oder Ausströmungspunkt einschliesst; folglich muss für jede Stelle der Platte die Gleichung gelten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

Ein- und Ausströmungspunkte ausgenommen.

Schliesst dagegen die Curve den Punkt A ein, so strömt die Menge von Elektricität

$$-\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A\omega$$

aus; wir haben somit in diesem Falle

$$-\varkappa 2c\int\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy-\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A\omega = 0,$$

und wenn wir das Stück auf die unendlich klein angenommene Fläche ω beschränken, so folgt für diese Stelle A

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A,$$

und ganz ähnlich die Gleichung für die Stelle B.

§. 93.

Allgemeine Lösung; charakteristische Function der Platte.

Nehmen wir an, es sei die Function $\varphi(x, y)$ gegeben, so wird die Grösse u durch die Gleichungen (1) und (2) bis auf eine Constante bestimmt. Wir beschäftigen uns zunächst mit dieser allgemeinen Aufgabe.

Zu diesem Ende untersuchen wir das Integral

$$(a) \qquad J = \int\int q(x_1, y_1) \log\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}\, dx_1\, dy_1 .$$

Hierin bedeuten (x, y) und (x_1, y_1) die Coordinaten zweier Punkte; $q(x_1, y_1)$ ist eine stätige, im Uebrigen beliebige Function der Stelle (x_1, y_1), und das Integral ist über die ganze Platte zu nehmen. Folglich ist J eine Function von (x, y).

Ist (x, y) ein Punkt ausserhalb der Platte, und nennen wir das Integral in diesem Falle J_a, so wird

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 J_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_a}{\partial y^2} = 0 ,$$

weil der log. dieser Gleichung genügt, und weil derselbe innerhalb des betrachteten Gebietes nicht unstätig wird.

Ist dagegen (x, y) ein innerer Punkt, und bezeichnen wir in diesem Falle das Integral mit J_i, so können wir nicht mehr den obigen Schluss ziehen; denn der log. wird innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich. Wir werden nachweisen, dass J_i der Gleichung genügt:

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 J_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_i}{\partial y^2} = 4\pi\, q(x, y).$$

Wir betrachten zuerst den besondern Fall, dass q constant ist und die Grenze ein Kreis von dem Halbmesser R. Wir legen den Anfangspunkt in die Mitte und führen die Polarcoordinaten (r, p) für (x_1, y_1), (ϱ, φ) für (x, y) ein. Dann wird

$$J = q \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \log\{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos(p - \varphi)\} r\, dr\, d\varphi .$$

Ist nun (x, y) ein äusserer Punkt, so ist $\varrho > R$; wir schreiben

$$\log\{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos(p - \varphi)\} = \log\varrho^2 + \log\left\{1 + \frac{r^2}{\varrho^2} - 2\frac{r}{\varrho}\cos(p - \varphi)\right\}$$

und entwickeln den zweiten log. nach Cosinus der Vielfachen von $(p - \varphi)$,

$$\log\left\{1 + \frac{r^2}{\varrho^2} - 2\frac{r}{\varrho}\cos(p - \varphi)\right\} = -2\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cos n(p - \varphi).$$

Nun ist $$\int_0^{2\pi} \cos n(p-\varphi).d\varphi = 0;$$

folglich wird

$$J_a = \pi R^2 . q \log \varrho^2.$$

Ist dagegen (x, y) ein innerer Punkt, $\varrho < R$, so müssen wir das Integral in zwei Theile zerlegen, $0 < r < \varrho$ und $\varrho < r < R$, und wir erhalten dann

$$\begin{aligned} J_i &= q\,2\pi \left\{ \int_0^{\varrho} \log \varrho^2 . r\,dr + \int_{\varrho}^{R} \log r^2 . r\,dr \right\} \\ &= q\,2\pi \left\{ \frac{\varrho^2}{2} \log \varrho^2 + \frac{R^2}{2} (\log R^2 - 1) - \frac{\varrho^2}{2} (\log \varrho^2 - 1) \right\} \\ &= \pi q \left\{ \varrho^2 + R^2 (2 \log R - 1) \right\}. \end{aligned}$$

Sind also a, b die rechtwinkligen Coordinaten des Kreismittelpunktes, so wird

$$J_i = \pi R^2 q (2 \log R - 1) + \pi q \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}.$$

Durch zweimalige Differentiation nach x und nach y erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 J_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_i}{\partial y^2} = 4\pi q.$$

In diesem besondern Falle ist also die oben angegebene Gleichung abgeleitet.

Nun sei (x, y) ein innerer Punkt in dem Fall einer beliebig begrenzten Platte. Wir legen um diesen Punkt einen kleinen Kreis, so klein, dass derselbe ganz im Innern der Platte liegt, und dass die stätige Function q innerhalb des Kreises als constant anzusehen ist. Wir theilen ferner das Integral in zwei Theile,

$$J = J' + J'',$$

wo J' über die kleine Kreisfläche zu nehmen ist, J'' über die Fläche der Platte mit Ausnahme des Kreises; dann ist der Punkt (x, y) ein äusserer Punkt für das Integral J'' und demnach

$$\frac{\partial^2 J''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J''}{\partial y^2} = 0.$$

Da ferner innerhalb des Kreises die Function q als constant anzusehen ist, folgt, wie eben bewiesen,

$$\frac{\partial^2 J'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J'}{\partial y^2} = 4\pi q,$$

wo q den Werth der Function in dem Punkt (x, y)
lich gilt die Gleichung (c) für J_i allgemein.

Die Function J hat mit einem Potential grosse
wollen die folgenden Sätze hervorheben, welche allgem

wir dieselben auch nur für den Fall eines Kreises ableiten. Aus den Werthen von J_i und J_a folgt für die Grenze $\varrho = R$

$$J_i = J_a,$$

aber auch

$$\frac{\partial J_i}{\partial \varrho} = \frac{\partial J_a}{\partial \varrho};$$

die Werthe des Integrals und seiner Abgeleiteten sind an der Grenze Innen und Aussen einander gleich.

Mit Hilfe des Integrales J können wir nun die Gleichungen (1) und (2) auf ein weit einfacheres System überführen. Wir setzen

$$(3)\quad u = -\frac{1}{4\pi 2c}\int\int \varphi(x_1, y_1) \log\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\}\, dx_1\, dy_1 + u_0,$$

und es muss dann u_0 der allgemeinen Differentialgleichung

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0$$

und der Randgleichung

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{1}{4\pi 2c}\frac{\partial}{\partial n}\int\int \varphi(x_1, y_1) \log\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\}\, dx_1\, dy_1$$

Genüge leisten. Der Vortheil besteht darin, dass die allgemeine Differentialgleichung eine viel einfachere Form besitzt; die Randgleichung schreibt für die Abgeleitete von u_0 nach der Normale einen beliebig gegebenen Werth vor,

$$(5)\qquad \frac{\partial u_0}{\partial n} = F(x, y).$$

Das System Gleichungen (4) und (5) kann ähnlich behandelt werden, wie oben das entsprechende Problem im Raum. Wir können für die Fläche eine charakteristische Function Ω von zwei Punkten finden, so dass

$$(6)\qquad u_0 = K - \frac{1}{4\pi}\int F(\alpha, \beta)\, \Omega\, dp.$$

Das Integral ist über die Grenzcurve zu erstrecken, deren Element dp bezeichnet. Ferner ist Ω eine Function von den Coordinaten (x, y) und (α, β) zweier Punkte, und zwar ist (x, y) ein beliebiger innerer Punkt, (α, β) ein Punkt der Grenze; die Integration bezieht sich auf den Punkt (α, β).

Die Definition der charakteristischen Function Ω ist die folgende:

$$(A)\quad \Omega = \frac{1}{f}\int\int \log\{(\alpha - x - a)^2 + (\beta - y - b)^2\}\, da\, db + \Omega',$$

wo f die Fläche eines um den Punkt (x, y) beschriebenen Kreises bezeichnet; a, b sind die relativen Coordinaten eines Punktes in Bezug auf (x, y), $da\, db$ ein Element der Kreisfläche, und das Integral soll über diese Kreisfläche erstreckt werden. Fallen die Punkte (x, y) und

(α, β) nicht zusammen, so können wir den Kreis immer so klein annehmen, dass die Grösse unter dem log. innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwindet; wir haben dann einfach

$$\Omega = \log\{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2\} + \Omega'.$$

Treten dagegen die Punkte (x, y) und (α, β) einander unendlich nahe, so muss der Werth des Integrales ebenso ermittelt werden, wie wir das oben eingehend gezeigt haben.

Ferner soll Ω' der Gleichung genügen

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial \beta^2} = 0;$$

endlich soll am Rande sein

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial n} = C,$$

und zwar ist hier die Stelle (α, β) in den Rand zu legen, während (x, y) ein beliebiger innerer Punkt bleibt.

Aus dieser Definition der Function Ω folgt die Gleichung (6). Wir haben, wenn wir u_0 als Function der Stelle (α, β) nehmen,

$$\int\int u_0 \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2}\right) d\alpha\, d\beta =$$

$$= \int u_0 \frac{\partial \Omega}{\partial n}\, dp - \int \frac{\partial u_0}{\partial n}\, \Omega\, dp + \int\int \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \beta^2}\right) \Omega\, d\alpha\, d\beta;$$

die Doppelintegrale sind über den ganzen Flächeninhalt der Platte zu erstrecken, die Linienintegrale über die Randcurve, und zwar in solcher Richtung, dass dn und dp so zu einander liegen, wie die positive x- und y-Axe.

Nach Gleichung (C) ist das erste Linienintegral rechts eine Constante, ferner das Doppelintegral rechts null wegen Gleichung (4). Setzen wir aber links für Ω seinen Werth aus der Gleichung (A) ein, so verschwindet der Theil mit Ω' in Folge der Gleichung (B); was den andern Theil betrifft, ist eine ähnliche Rechnung anzustellen, wie oben mit J_i. Wir zerlegen das Integral in zwei Theile, das eine über die Kreisfläche mit dem Mittelpunkt (x, y), das andere über den Rest der Platte; das letztere Integral wird null, da wir eine Function von der Natur J_a haben; das erstere Integral aber hat den Werth

$$4\pi u_0(x, y).$$

Folglich erhalten wir

$$4\pi u_0 (x, y) = \text{Const.} - \int \frac{\partial u_0}{\partial n}\, \Omega\, dp,$$

und das ist die Gleichung (6).

Durch Aufstellung der charakteristischen Platte ist das Problem gelöst; wir haben (3), (6) und (5):

$$u = -\frac{1}{4\pi 2c}\int\int \varphi(x_1, y_1) \log\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\}\, dx_1\, dy_1 + u_0,$$

$$u_0 = K - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial u_0}{\partial n}\, \Omega\, dp,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{1}{4\pi 2c}\frac{\partial}{\partial n}\int\int \varphi(x_1, y_1) \log\{(\alpha-x_1)^2 + (\beta-y_1)^2\}\, dx_1\, dy_1,$$

und zwar haben wir in den beiden letzten Formeln die Stelle (α, β) in den Rand zu legen, in Bezug auf diesen Punkt nach der Normale n zu differentiiren, u. s. f.

§. 94.

Anwendung auf den besondern Fall.

Wir haben hiebei die Function φ noch beliebig gelassen; wir wollen nun dieselbe den Bedingungen gemäss bestimmen.

Es sei nur ein Ein- und ein Ausströmungspunkt vorhanden, A und B. Wir betrachten die Berührungsflächen ω und ω' als unendlich klein; wir können dann der Function φ für diese beiden Flächen die constanten Werthe β_1 und β_2 zuschreiben; ferner folgt nach S. 246:

$$\beta_1 = -\frac{j}{\varkappa\omega}, \qquad \beta_2 = \frac{j}{\varkappa\omega'},$$

wo j die Stromstärke im Schliessungsdraht bezeichnet. Demnach wird, wenn die Stelle (x, y) in endlicher Entfernung von den Ausströmungspunkten liegt,

$$u = \frac{j}{4\pi.2c.\varkappa}\log\frac{E^2_{A,x}}{E^2_{B,x}} + u_0,$$

weiter

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = -\frac{j}{4\pi.2c.\varkappa}\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{E^2_{A,x}}{E^2_{B,x}},$$

und schliesslich

$$(7) \qquad u = \frac{j}{4\pi.2c.\varkappa}\left\{\log\frac{E^2_{A,x}}{E^2_{B,x}} + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{E^2_{A,\alpha}}{E^2_{B,\alpha}}\,.\,\Omega\, dp\right\}.$$

In dieser Gleichung (7) bezeichnet der Index α den Punkt (α, β), welcher in die Randcurve fallen soll, dn die Normale nach Aussen in diesem Punkt und dp das Bogenelement. Bei Ausführung der Integration ist so auf der Randcurve zu gehen, dass die Richtungen dn und dp zu einander liegen, wie die positive x- und y-Axe.

Soll die Stromstärke j bestimmt werden, so muss eine ganz ähnliche Betrachtung angestellt werden, wie wir sie oben bei der Untersuchung der stationären Strömung im Raum durchgeführt haben.

§. 95.

Fall der Kreisscheibe; charakteristische Function derselben.

Um ein Beispiel zu erhalten, berechnen wir die charakteristische Function für eine Kreisscheibe.

Ihr Halbmesser sei R; wir legen den Anfangspunkt in die Mitte und führen statt der geradlinigen Coordinaten (α, β) und (x, y) die Polarcoordinaten (r, p) und (ϱ, φ) ein. Wir haben dann, wenn die Punkte r und ϱ nicht zusammenfallen,

$$\Omega = \log E^2_{r,\varrho} + \Omega',$$

wo

$$E^2_{r,\varrho} = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos(p - \varphi).$$

Da wir nachher $r = R$ zu setzen haben, entwickeln wir nach steigenden Potenzen von $\frac{\varrho}{r}$ und erhalten

$$\log E^2_{r,\varrho} = \log r^2 - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cos n(p - \varphi).$$

Weiter muss Ω' der Differentialgleichung genügen

$$\frac{\partial^2\Omega'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega'}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega'}{\partial p^2} = 0.$$

Wir setzen

$$\Omega' = A_0 + \sum_1^\infty X_n \cos n(p - \varphi);$$

dann folgt für X_n die Differentialgleichung

$$\frac{d^2X_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dX_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2}X_n = 0;$$

demnach wird

$$X_n = A_n r^n + B_n r^{-n},$$

und da wir eine volle Kreisscheibe annehmen, muss $B_n = 0$ sein. Mithin ist

$$\Omega' = A_0 + \sum_1^\infty A_n r^n \cos n(p - \varphi),$$

wo die Coefficienten A Functionen von ϱ und φ sind.

Endlich liefert uns die Bedingung am Rande,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n} = C,$$

die Gleichung

$$\frac{2}{R} + 2\sum_1^\infty \frac{\varrho^n}{R^{n+1}}\cos n(p - \varphi) = C - \sum_1^\infty n A_n R^{n-1}\cos n(p - \varphi);$$

folglich wird

$$C = \frac{2}{R}, \qquad A_n = -\frac{2}{n}\frac{\varrho^n}{R^{2n}}.$$

Wir finden somit

$$\Omega' = A - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{r^n\varrho^n}{R^{2n}}\cos n(p - \varphi),$$

oder, da wir die Reihe summiren können,

$$\Omega' = A + \log\left\{1 + \frac{r^2\varrho^2}{R^4} - 2\frac{r\varrho}{R^2}\cos(p-\varphi)\right\},$$

wo A eine Constante bedeutet.

Der Werth von Ω am Rande, $r = R$, wird hienach

$$\Omega = A + 2\log\frac{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos(p-\varphi)}{R^2}.$$

Mittelst der Gleichung (7) kann nun der Werth von u berechnet werden. Das Bogenelement, welches oben mit dp bezeichnet war, ist jetzt Rdp; für dn ist dr zu schreiben und nach Ausführung der Differentiation $r = R$ zu setzen; die Coordinaten der Ein- und Ausströmungspunkte, A und B, seien ϱ_1, φ_1 und ϱ_2, φ_2; dann ist

$$E^2_{A,a} = \varrho_1^2 + r^2 - 2\varrho_1 r\cos(p-\varphi_1),$$
$$E^2_{B,a} = \varrho_2^2 + r^2 - 2\varrho_2 r\cos(p-\varphi_2).$$

Der Werth des Integrales kann in endlicher Form gegeben werden. Wir entwickeln den log. in eine Reihe und differentiiren nach r, setzen dann $r = R$ und multipliciren mit der Reihe, welche den Werth von Ω am Rande darstellt; dann wird nach p integrirt, und wir erhalten eine Reihe, welche wieder durch einen log. dargestellt wird. Auf diesem Wege finden wir für u den folgenden Werth:

$$u = \frac{j}{4\pi\,.\,2c\,.\,\varkappa}\left\{\log\frac{E^2_{A,x}}{E^2_{B,x}} + \log\frac{1 + \left(\frac{\varrho\varrho_1}{R^2}\right)^2 - 2\frac{\varrho\varrho_1}{R^2}\cos(\varphi-\varphi_1)}{1 + \left(\frac{\varrho\varrho_2}{R^2}\right)^2 - 2\frac{\varrho\varrho_2}{R^2}\cos(\varphi-\varphi_2)}\right\}.$$

Multipliciren wir unter dem zweiten log. den Zähler mit $\left(\frac{R^2}{\varrho_1}\right)^2$, den Nenner mit $\left(\frac{R^2}{\varrho_2}\right)^2$, so wird der Werth von u nur um eine Constante geändert; diese bleibt überhaupt willkührlich; Zähler und Nenner haben dann eine einfache Bedeutung: Der Zähler

$$\frac{R^4}{\varrho_1^2} + \varrho^2 - 2\frac{R^2}{\varrho_1}\varrho\cos(\varphi-\varphi_1)$$

ist gleich dem Quadrat der Entfernung zwischen den Punkten $\left(\frac{R^2}{\varrho_1}, \varphi_1\right)$ und (ϱ, φ), der Nenner gleich dem Quadrat der Entfernung zwischen den Punkten $\left(\frac{R^2}{\varrho_2}, \varphi_2\right)$ und (ϱ, φ). Die Punkte $\left(\frac{R^2}{\varrho_1}, \varphi_1\right)$ und $\left(\frac{R^2}{\varrho_2}, \varphi_2\right)$ sind die harmonischen Pole A' und B' der Punkte A und B in Bezug auf den Kreis. Wir erhalten so für u den einfachen Ausdruck:

$$u = \frac{j}{4\,.\,\pi\,2c\,.\,\varkappa}\left\{\log\frac{E^2_{A,x}}{E^2_{B,x}} + \log\frac{E^2_{A',x}}{E^2_{B',x}}\right\}.$$

Die Form wird besonders einfach, wenn man die Stellen A und B in den Rand treten lässt. Dann fallen die Punkte A und A', ebenso B und B' zusammen, und man erhält:

$$u = \frac{2j}{4\pi\,.\,2c\,.\,\varkappa}\log\frac{E^2_{A,x}}{E^2_{B,x}}.$$

Dies ist der erste experimentell geprüfte Fall. Kirchhoff*) hat durch Beobachtung der stationären Strömung von Elektricität in einer Kreisscheibe die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung streng nachgewiesen. Die Spannungscurven sind in diesem Falle Kreise, deren Mittelpunkte auf der Geraden AB liegen, dagegen die Strömungscurven Kreise, welche durch die Punkte A und B gehen. Wir können somit die Strömungscurven unmittelbar eintragen und die Spannungscurven construiren, indem wir eine Tangente an eine Strömungscurve

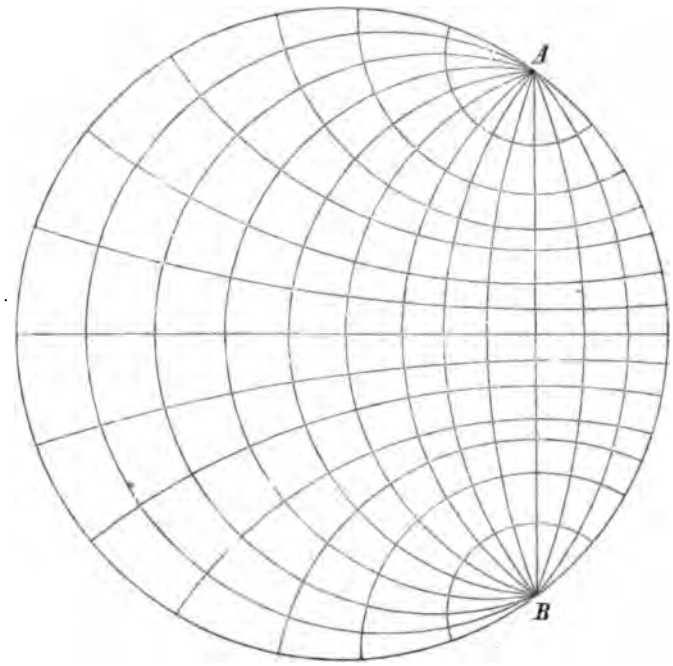


Fig. 58.

legen und durch den Berührungspunkt den Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in den Schnittpunkt der Tangente mit der Linie AB fällt.

Für die Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung ist der Werth der Stromstärke j gleichgiltig; dagegen müssen wir dieselbe berechnen, wenn wir den Widerstand der Scheibe bestimmen wollen. Die S. 246 aufgestellten Gleichungen geben

$$\Delta = -(u_A - u_B) + \frac{lj}{kq} + \frac{l'j}{k'q'}.$$

Wenden wir aber den für u gefundenen Ausdruck auf die Stellen A und B an, so erhalten wir die Grössen:

*) Kirchhoff: Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. Pogg. Ann. 64. 184. 5 S. 497. — Nachtrag, ib., 67. 18[illegible]

$$\log E^2_{A,A} \quad \text{und} \quad \log E^2_{B,B};$$

das sind zunächst nur Symbole. Wir müssen, um die Werthe zu berechnen, auf früher aufgestellte Formeln zurückgehen. Wir haben die Ausdrücke erhalten, indem wir Integrale über die kleinen Flächen ω und ω' gleich dem Product der Function unter dem Integral in die Fläche gesetzt haben. Dies darf nicht mehr geschehen; vielmehr sind die Werthe ganz ebenso, wie oben in dem Falle einer leitenden Kugel, zu berechnen.

$u_B - u_A$ wird dann gleich dem Product der Stromstärke j in den Widerstand der Scheibe; dieser Widerstand wird also der Dicke $2c$ der Scheibe umgekehrt proportional und somit durchaus nicht klein, wenn die Scheibe dünn ist. Klebt man z. B. ein Stanniolblättchen auf eine Glasscheibe, so wird der Widerstand sehr merklich und genau messbar.

VIII. Kapitel.

Die inducirten Ströme.

A. Uebersicht über die Erscheinungen der inducirten Ströme.

§. 96.

Die Erscheinungen der Elektroinduction.

In der Nähe eines Leiters befinde sich ein anderer von einem elektrischen Strom durchflossener Leiter oder ein Magnet; dann tritt in dem Augenblick, wo wir den Strom oder den Magnet entfernen oder nähern, oder in dem Augenblick, wo wir den Leiter entfernen oder nähern, in dem Leiter ein elektrischer Strom auf; es wird in dem Leiter ein Strom inducirt.

Der Entdecker dieser Erscheinungen ist Faraday; er hat gezeigt, dass in einem Leiter ein solcher inducirter Strom immer auftritt, sobald die relative Lage des Leiters gegen einen vorhandenen elektrischen Strom oder einen Magnet irgend eine Veränderung erleidet.

Die einfachsten Strömungen treten auf, wenn dem Leiter eine lineare Form gegeben wird; dem inducirten Strom ist dann der Weg vorgeschrieben. Zu diesem Behuf muss aber der Draht eine in sich geschlossene Linie bilden. Nur Strömungen in solchen geschlossenen Curven werden Gegenstand unsrer Untersuchung sein; die inducirten Strömungen im Raum sind sehr schwer theoretisch zu behandeln.

Wir schicken der Theorie einen kurzen Ueberblick über die thatsächlichen Verhältnisse voraus; eine ausführlichere Darstellung findet sich in jedem Lehrbuch der Physik.

Man unterscheidet Erscheinungen der Elektroinduction und der Magnetoinduction, je nachdem der sogenannte Inducent ein elektrischer Strom oder ein Magnet ist. Wir betrachten zunächst die erstern.

Ein einfacher Fall ist der folgende:

Zwei Drahtkreise seien einander parallel aufgestellt, so dass ihre Ebenen auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht stehen. In dem Drahtkreis SS fliesse ein elektrischer Strom; der zweite Drahtkreis DD sei mit Einschaltung eines Galvanometers in sich geschlossen. Statt der einfachen Kreise können wir auch Systeme von Kreisen, Drahtrollen, nehmen. In dem Augenblick, wo DD

parallel mit sich selbst von α gegen β bewegen, erleidet die Nadel in dem Galvanometer eine Ablenkung, und von dem Augenblick an, wo der Drahtkreis in β stillsteht, hört die Wirkung auf. Gehen wir dann von β nach β_1 in derselben Richtung weiter, so tritt in dem Draht wieder ein Strom gleicher Richtung auf, und zwar fliesst der inducirte Strom in entgegengesetzter Richtung mit dem inducirenden. Endlich ist, wenn $\alpha\beta = \beta\beta_1$, der auf dem Wege von β nach β_1 inducirte Strom stärker, als der auf dem Wege non α nach β inducirte.

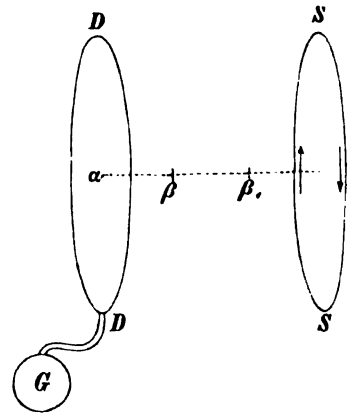


Fig. 59.

Die inducirten Ströme, von denen jetzt die Rede ist, können jedoch mittelst des Multiplicators nicht, wie gewöhnliche elektrische Ströme gemessen werden; wir haben stillschweigend angenommen, die Bewegung des Drahtkreises von α nach β und von β nach β_1 geschehe sehr rasch, so dass die Wirkung und damit auch der inducirte Strom nur sehr kurze Zeit andauert; es kann daher von einer constanten Ablenkung der Nadel und von Beobachtung einer solchen Ablenkung nicht die Rede sein. Ueberdies tritt, wie aus dem Obigen hervorgeht, noch ein zweiter Umstand hinzu, der eine constante Ablenkung hindert: die von den einzelnen Elementen der Bewegung inducirten Ströme sind verschieden stark. Demnach fliesst in dem Drahtkreis DD ein variabler Strom von äusserst kurzer Dauer.

Zu einem Maass dieser Ströme gelangen wir auf dem folgenden Wege. Die Bewegung geschehe rasch und umfasse nur einen sehr kurzen Zeitraum im Vergleich mit der Schwingungsdauer der Magnetnadel; dann erleidet in jedem Zeitmoment die Nadel einen Impuls, ändert aber während des ganzen Zeitraumes ihre Lage nicht merklich; wir können daher annehmen, die Nadel erhalte die sämmtlichen Impulse in der Ruhelage; diese Impulse summiren sich zu einem Ge sammtimpuls, welcher der Nadel eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit ertheilt. Die Nadel wird also durch einen Stoss in Bewegung versetzt, und die Weite des Ausschlags hängt von der Stärke des Stosses ab. Die Beziehung der beiden Grössen giebt die Theorie des Pendels.

So zeigt die Beobachtung, dass die Summe der Impulse, welche die Nadel erfährt, eine grössere ist, wenn der Drahtkreis, statt von α nach β, von β nach β_1 bewegt wird. Kehren wir dann von β_1 nach α zurück, so erhalten wir dieselbe Summe von Impulsen, aber in ent-

gegengesetzter Richtung. Folglich hat bei der Entfernung der inducirte Strom entgegengesetzte Richtung, wie der durch Näherung inducirte, also mit dem inducirenden Strome gleiche Richtung.

Wir erhalten den stärksten Impuls, wenn wir die Ebene des sogenannten Inductors, des Drahtkreises DD, bis in die Ebene des Inducenten führen; gehen wir aber durch diese Ebene hindurch, so wird der Stoss geschwächt. Wenn wir den Drahtkreis DD durch die Ebene SS hindurch auf die andere Seite in dieselbe Entfernung führen, so ist die Summe der sämmtlichen Impulse gleich null; die Nadel bleibt in der Ruhelage stehen. Dies ist nothwendige Folge des vorher Gesagten; es muss für jede Entfernung gelten.

Ist die Zeit, in welcher der Drahtkreis von α nach β bewegt wird, sehr klein gegen die Schwingungsdauer der Nadel, so hat die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung stattfindet, keinen Einfluss auf den Ausschlag, ebensowenig der Weg, auf welchem man von α nach β geht; man kann auf der Geraden oder auf einer beliebigen Curve gehen.

Wir können zweitens auch durch eine drehende Bewegung in dem Drahtkreis einen Strom induciren. Im Vorhergehenden haben wir angenommen, die beiden Drahtkreise bleiben einander immer parallel; jede Bewegung kann dann aus dieser fortschreitenden und einer drehenden zusammengesetzt werden. Wir nehmen ferner der Bequemlichkeit wegen Kreisströme an; die vorhergehenden Bemerkungen gelten aber ebenso, wie die folgenden, für jede Form des linearen geschlossenen Leiters.

Eine drehende Bewegung kann etwa in der folgenden Weise zur Induction benutzt werden. Um den von einem Strom durchflossenen Drahtkreis SS sei der andere Drahtkreis DD drehbar, und die Drehungsaxe gehe durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Kreise. Gehen wir von der Lage aus, wo die Ebenen der beiden Kreise zusammenfallen, und drehen wir den Drahtkreis DD nach der einen oder andern Seite, so entsteht in demselben ein Strom von gleicher Richtung mit dem in SS fliessenden. Die Summe der Impulse wächst, wenn wir bis 180° drehen; von da an nimmt sie ab, und bei einer Drehung um 360° findet keine Wirkung statt. Durch die eine halbe Umdrehung erhalten wir also eine ebenso starke positive, wie durch die andere halbe eine negative Strömung. Hiebei ist immer angenommen, es werde rasch gedreht.

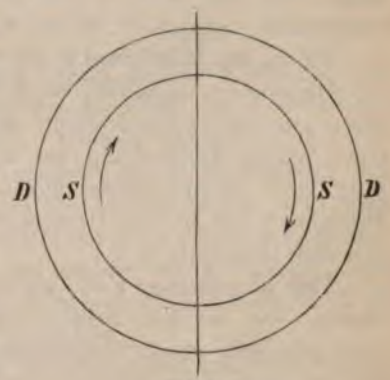


Fig. 60.

Man kann aber durch eine einfache Vorrichtung bewirken, dass durch das Galvanometer alle Ströme in derselben Richtung fliessen, und so eine continuirliche Wirkung erzielen. Die beiden Drahtenden des Kreises *DD* werden mit den beiden, von einander isolirten Hälften eines Metallringes verbunden; auf diesem Metallring schleifen zwei Federn, welche mit den Enden des Multiplicatordrahtes in Verbindung stehen; der Metallring dreht sich mit dem Drahtkreise *DD*, und die Federn sind so gestellt, dass in dem Momente, wo die Ebene *DD* durch die Ebene des festen Kreises *SS* hindurchgeht, die Federn von der einen Hälfte des Metallringes auf die andere überspringen. Mittelst dieser einfachen Einrichtung hat Wilhelm Weber erreicht, dass in dem Momente, wo der Strom in *DD* die entgegengesetzte Richtung erhält, die beiden Enden des Multiplicatordrahtes mit einander vertauscht werden. Dann hat der Strom im Multiplicator immer dieselbe Richtung. Seine Stärke ist zwar veränderlich während der Zeit einer Umdrehung; wenn aber die Drehung rasch und mit constanter Geschwindigkeit stattfindet, so erhält die Nadel eine constante Ablenkung, welche dem mittlern Werth der Stromstärke entspricht; die Nadel zittert vielleicht etwas um eine bestimmte abgelenkte Lage, um so weniger, je rascher gedreht wird. Die Grösse der Ablenkung wird durch die Umdrehungsgeschwindigkeit bedingt, weil bei einer ganzen Umdrehung die Summe der Impulse einen bestimmten constanten Werth hat.

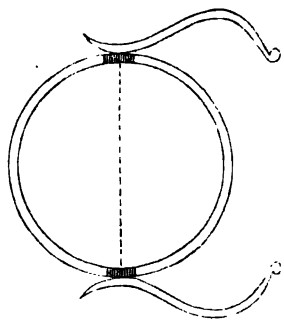


Fig. 61.

Fallen die Mittelpunkte der beiden Kreise nicht zusammen, so gilt im Allgemeinen dasselbe; auch hier ist die Summe der Impulse null, wenn eine ganze Umdrehung stattfindet; es muss also wieder bei der einen halben Umdrehung der inducirte Strom entgegengesetzte Richtung, aber gleiche Stärke haben, wie bei der andern. Ferner ist die Wirkung einer halben Umdrehung unabhängig von der Geschwindigkeit der Drehung, u. s. f.

Den allgemeinen Fall, wo der Drahtkreis *DD* beliebig bewegt wird, können wir aus den beiden eben betrachteten zusammensetzen, und zwar gilt hier wieder der allgemeine Satz, dass die Art, wie der Leiter aus der einen Lage in die andere übergeführt wird, auf den Gesammtimpuls ohne Einfluss ist; wir können zuerst die fortschreitende Bewegung vornehmen und dann die Drehung, oder umgekehrt, oder endlich gleichzeitig fortrücken und drehen; der Ausschlag der Multiplicatornadel ist immer derselbe. Vorausgesetzt wird immer, dass die ganze Bewegung in sehr kurzer Zeit beendet sei.

Weiter hat Lenz in Petersburg eine sehr einfache Regel angegeben für die Richtung des inducirten Stromes. Diese Regel ist durch eine grosse Zahl von Beobachtungen als allgemein giltig erwiesen; sie lautet: Der inducirte Strom hat immer eine solche Richtung, dass die Wirkung des vorhandenen Stromes auf den inducirten der Bewegung, welche den inducirten Strom hervorruft, einen Widerstand entgegensetzt. Wir finden dies in dem oben Angeführten bestätigt; bei der Näherung sind die Ströme entgegengesetzt, bei der Entfernung gleich gerichtet; die Wirkung zwischen den Strömen ist im erstern Falle abstossend, in dem letztern anziehend. Bei der Drehung haben beide Ströme gleiche Richtung, und dann ist die Wirkung derart, dass sie die Ströme in eine Ebene zu bringen strebt.

In den beiden bisher betrachteten Fällen wird ein Strom veränderlicher Stärke inducirt. Es ist aber wichtig, einen wirklich constanten Strom zu erhalten, und wir gelangen hiezu, wenn wir mit Beachtung der Lenzschen Regel auf einen von Ampère construirten Apparat zurückgehen. Ein bewegliches Leiterstück AB sei um eine verticale Axe durch A drehbar und, wie die Zeichnung andeutet, von einem geschlossenen Strom SS umgeben. Wir wissen, dass, wenn in AB ein Strom fliesst, das Stromstück AB durch den Stromkreis SS in continuirlich beschleunigte Bewegung versetzt wird. Nun werde aber das Leiterstück AB mittelst der Axe A gedreht; dann wird der Strom SS in dem bewegten Leiter einen Strom induciren, und zwar einen Strom solcher Richtung, dass die Wirkung der Ströme auf einander der Drehung des Leiterstückes um A einen Widerstand entgegensetzt. Drehen wir ferner mit constanter Geschwindigkeit, so ist der inducirte Strom nothwendig constant; denn die Lage des Leiters gegen den Strom erleidet keine Aenderung. Wir können so eine ganz feste Ablenkung der Nadel erhalten, allerdings eine sehr schwache; dass die Grösse der Ablenkung durch die Drehungsgeschwindigkeit bedingt wird, steht mit dem oben Bemerkten wieder nur in scheinbarem Gegensatz.

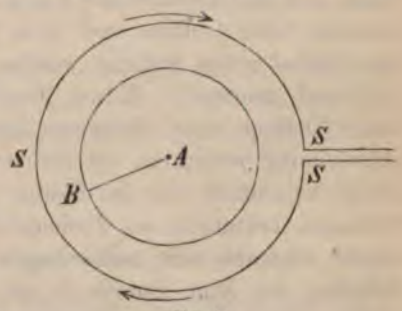


Fig. 62.

Viertens kann durch Aenderung der Stromstärke in dem vorhandenen Strom, ohne dass irgend eine Ortsveränderung stattfände, ein Strom inducirt werden. Die beiden Drahtkreise SS und DD seien in einer Ebene fest aufgestellt; in dem Augenblick, wo in dem Kreise SS ein Strom auftritt, wird ein Strom in dem Drahtring DD inducirt; er dauert nur eine äusserst kurze Zeit, wenn der Strom in SS mit con-

stanter Stärke fliesst. Wird aber dieser Strom unterbrochen, so tritt in dem Augenblick, wo wir öffnen, in *DD* wieder ein momentaner Strom auf. Und zwar hat in dem letztern Fall der inducirte Strom gleiche Richtung mit dem unterbrochenen, in dem erstern entgegengesetzte mit dem geschlossenen. Wir können uns die beiden Fälle so denken, dass ein constanter Strom aus unendlich grosser Entfernung rasch in die Lage *SS* gebracht und dann wieder aus dieser Lage unendlich weit entfernt werde; die Lenzsche Regel giebt in beiden Fällen die oben genannte Richtung für den inducirten Strom.

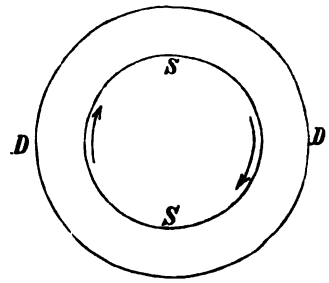


Fig. 63.

Wir haben den extremen Fall betrachtet, wo ein Strom ganz eintritt oder ganz aufhört; aber auch jede Intensitätsänderung in einem vorhandenen Strom inducirt einen Strom in dem benachbarten Leiter.

Unmittelbare Folge dieser Thatsache ist die interessante Erscheinung, auf welche ebenfalls Faraday zuerst aufmerksam gemacht hat; es muss beim Oeffnen und beim Schliessen einer Kette ein Strom in dem Leiter selbst inducirt werden; Faraday hat denselben Extracurrent genannt. Dieser Extrastrom oder Nebenstrom wird beim Oeffnen eine Stromverstärkung, beim Schliessen eine Stromschwächung bewirken; die Grösse der Verstärkung oder Schwächung hängt wesentlich von der Gestalt des Stromleiters ab und ist bei spiralförmigen Leitungen am Bedeutendsten, indem da möglichst viel Elemente einander sehr nahe liegen. Dies war schon lange beobachtet. Schalten wir eine Spirale in die Leitung ein, so erhalten wir beim Oeffnen einen kräftigen Funken; dieser wird schwach oder gar nicht wahrnehmbar, wenn wir die Spirale ausziehen. Bei der Schliessung tritt dagegen eine Stromschwächung ein; es wird nicht momentan der volle Strom erzeugt. Dies bildet ein grosses Hinderniss für die Beantwortung der Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich die Elektricität fortpflanze; scheinbar hängt diese Geschwindigkeit von der Form des Leiters ab.

Aehnliche Vorgänge finden in dem Stromwege selbst bei jeder Aenderung der Stromstärke statt.

Der Extrastrom kann mittelst der Wheatstoneschen Brücke genau beobachtet werden. Man legt die Brücke *CD* so, dass bei vollem Strom keine Ablenkung der Galvanometernadel eintritt; ferner ist zwischen *AC* und *DB* der Draht spiralförmig gewunden, zwischen *CB* und *AD* dagegen nicht. Namentlich in dem Momente, wo wir den Strom öffnen, erhält die Galvanometernadel einen kräftigen Stoss. Auf diesem Wege kann der Extracurrent gemessen werden.

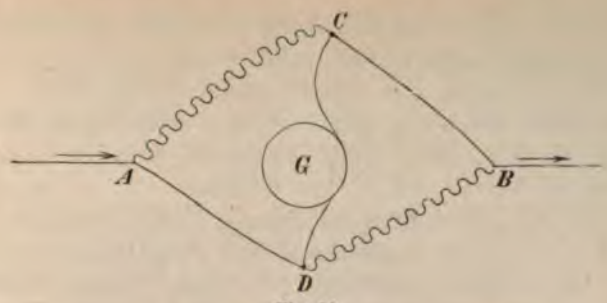


Fig. 64.

Wir fügen dieser kurzen Uebersicht über die Erscheinungen der Elektroinduction noch einige allgemeine Bemerkungen bei. Wir haben den Fall betrachtet, wo der Leiter, in welchem ein Strom inducirt wird, seinen Ort ändert; ebenso gut hätten wir annehmen können, es werde der inducirende Strom bewegt; es kommt nur auf die relative Ortsveränderung von Strom und Leiter an. So lange die beiden Leiter ihre Form nicht ändern, können wir den einen Fall auf den andern überführen, durch gemeinschaftliche Bewegung der beiden Leiter, welche nicht inducirend wirkt.

Man stellt ferner die Beobachtungen niemals mit einzelnen Drahtringen, sondern immer mit Aggregaten von solchen, mit Drahtrollen an; man erhält dann viel stärkere inducirte Ströme und kann dieselben genau messen.

§. 97.

Die Erscheinungen der Magnetoinduction.

Wir betrachten noch ganz kurz die Erscheinungen der sogenannten Magnetoinduction. Eigentlich ist dies keine besondere Classe von Erscheinungen; wenn die Ampèresche Vorstellung vom magnetischen Zustand richtig ist, so folgen die Gesetze der Erscheinungen aus dem oben Bemerkten.

Eine einfache und hübsche Methode, durch Magnete Ströme zu induciren, ist die folgende. Zwei Multiplicatoren mit horizontalen Magnetnadeln werden in weiter Entfernung von einander fest aufgestellt und die Enden durch zwei Drähte so mit einander verbunden, dass ein einfacher geschlossener Leiter entsteht. Bringt man nun in dem einen Multiplicator die Nadel in Schwingungen, so inducirt der bewegte Magnet Ströme in dem Leiter, und diese Ströme versetzen die Magnetnadel in dem andern Multiplicator ebenfalls in Schwingungen. Jedesmal, wenn die erste Nadel ihre Bewegungsrichtung umkehrt, muss der inducirte Strom seine Richtung ändern und somit auf die Bewegung der zweiten Nadel hemmend einwirken. Dies ist der Grund, weshalb die beiden Nadeln immer zusammen schwingen.

Dass ferner der durch Bewegung der Nadel inducirte Strom auf die Nadel hemmend zurückwirkt, erkennt man leicht, indem man einmal die Nadel eines in sich geschlossenen Multiplicators in Schwingungen versetzt, und dann genau ebenso, während der Multiplicator geöffnet ist; in dem erstern Fall nehmen die Amplituden der Schwingungen viel rascher ab, als in dem letztern.

Man benutzt diesen Umstand um die Magnetnadel rasch in Ruhe zu bringen; man umgiebt die Nadel mit Kupferringen oder Kupferplatten, in denen durch Bewegung der Nadel Ströme inducirt werden; diese letztern wirken stark dämpfend auf die Schwingungen der Nadel. Solche Kupferplatten heissen deshalb Dämpfer.

Ein anderer Fall von Magnetoinduction ist der folgende. Ein Magnet ist vertical aufgestellt; über denselben kann eine Drahtrolle geschoben werden, deren Enden mit einem Multiplicator in Verbindung stehen. Gehen wir mit der Drahtrolle aus der Lage α nach β, so wird durch den Magnet ein Strom inducirt; die Nadel im Multiplicator schlägt aus. Die Richtung des inducirten Stromes wird durch die Lenzsche Regel bestimmt: der Strom muss in der Drahtrolle so fliessen, dass die Wirkung des Magnets auf diesen Strom der Bewegung von α nach β einen Widerstand entgegensetzt. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung stattfindet, ist ohne Einfluss auf den Ausschlag der Nadel, sobald nur die Bewegung rasch ausgeführt wird. Der Ausschlag wächst, wenn wir die Drahtrolle bis in die Mitte γ des Magnets führen, und wir erhalten den stärksten Ausschlag, wenn wir aus sehr grosser Entfernung bis in die Mitte gehen. Ueberschreiten wir diese Mitte, so wird der Ausschlag kleiner. Gehen wir ein Mal von oben über den Nordpol, das andere Mal von unten über den Südpol aus gleicher Entfernung bis in die Mitte γ, so erhalten wir denselben Ausschlag. Wir können auch aus einer beliebigen Anfangsposition über den Nordpol oder über den Südpol in die Endposition γ gehen: der Ausschlag muss derselbe sein.

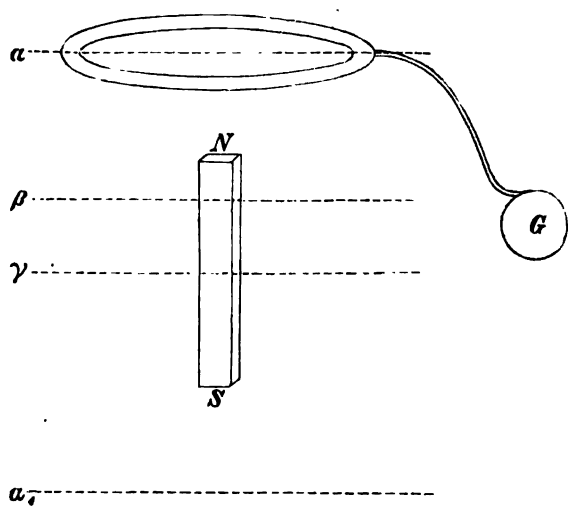


Fig. 65.

Dem entspricht, dass die Ausschläge gleiche Grösse und Richtung erhalten, wenn wir von der Anfangsposition γ aus über den Nordpol oder über den Südpol in dieselbe Entfernung gehen. Gehen wir endlich in einem Zuge rasch von der Position α nach einer zweiten α_1, welche ebenso weit unter der Mitte liegt, wie α darüber, so wird die Wirkung null.

Diese Ströme sind bei Anwendung starker Magnete sehr kräftig, und sie werden deshalb zur Beruhigung einer Multiplicatornadel häufig benutzt. Man umgiebt die Nadel mit einer besondern Multiplicatorrolle, deren Enden durch Drähte mit einer zweiten Drahtrolle in Verbindung stehen, welche über einen in grosser Entfernung aufgestellten Magnet bewegbar ist. Namentlich bei Messungen mit Fernrohr und Scale ist dies ein sehr nützliches Hilfsmittel. Man hebt oder senkt die Rolle, so dass der Impuls die Bewegung der Nadel schwächt; nach zwei bis drei Stössen ist die Nadel in Ruhe. Es bedarf noch einer kleinen Vorrichtung, um die Leitung zu öffnen, sobald die Nadel stillsteht; man kann nachher die Drahtrolle hinlegen, ohne dass dadurch die Nadel wieder in Bewegung versetzt wird.

Ein dritter Fall von Magnetoinduction wird durch eine drehende Bewegung erzielt. Ueber einem vertical aufgestellten Magnete NS ist eine Drahtrolle um eine horizontale Axe AB drehbar; die Drahtenden sind mit einem Multiplicator verbunden. Gehen wir von der Lage aus, wo die Ebene der Drahtrolle horizontal ist, und drehen wir um einen Winkel φ, so erleidet die Multiplicatornadel einen Stoss; die Grösse desselben wächst mit der Drehung bis $\varphi = 180^0$; gehen wir weiter, so tritt Schwächung ein. Der inducirte Strom hat also bei der Drehung von 0 bis 180^0 in der Drahtrolle dieselbe Richtung, von da an die entgegengesetzte. Damit bei fortgesetzter gleichmässiger und rascher Drehung eine stätige Ablenkung der Nadel eintrete, muss ein Commutator benutzt werden, der bei jedem Durchgang der Draht-

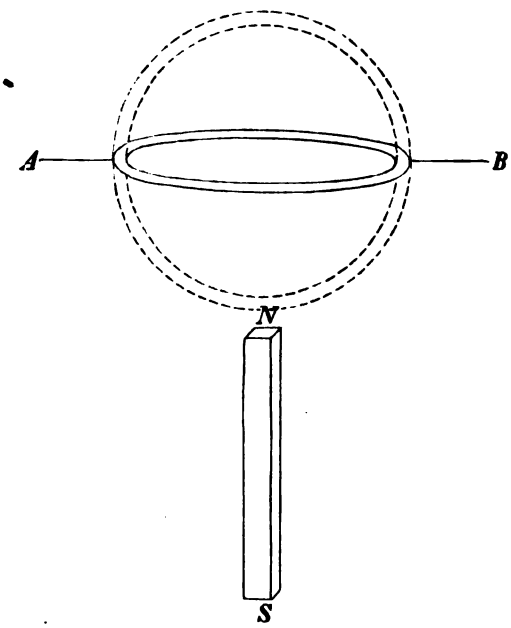


Fig. 66.

rolle durch die horizontale Ebene die Verbindung mit dem Multiplicator umkehrt; dann zittert die Nadel gewissermaassen um eine von der Ruhelage abweichende Gleichgewichtslage; diese wird durch den Mittelwerth der inducirten Stromstärke bedingt.

Hierauf beruht das Webersche Inductionsinclinatorium. Als Magnet dient der Erdmagnet. Wird die Drahtrolle um eine verticale Axe gedreht, so kommt nur die horizontale Componente der erdmagnetischen Kraft zur Geltung; ist dagegen die Drehungsaxe horizontal und dem magnetischen Meridian parallel, so wirkt bloss die verticale Componente. Wenn wir daher dieselbe Drahtrolle mit derselben Geschwindigkeit um die verticale und um die horizontale Axe drehen, so bestimmen die Ablenkungen der Nadel das Verhältniss der horizontalen und der verticalen Componente der erdmagnetischen Kraft, also die magnetische Inclination.

Wir wollen noch einen vierten Fall hervorheben, wo die Induction auf der plötzlichen Entstehung eines Magnets beruht. Eine weiche Eisenmasse sei von einer Drahtspirale umgeben; wird dann das Eisen plötzlich in einen magnetischen Zustand versetzt, so muss ein Strom in der Drahtspirale erzeugt werden, gerade wie wenn ein permanenter Magnet aus grosser Entfernung schnell in die Spirale gesteckt oder die Spirale schnell über den Magnet geschoben würde.

Der magnetische Zustand der Eisenmasse kann auf doppelte Weise erhalten werden. Entweder nähert man dem Eisen einen Stahlmagnet. Dann induciren zwei Momente einen Strom in der Drahtspirale, einmal die Näherung des Magnets und dann der in dem Eisen hervorgerufene magnetische Zustand, und diese beiden Wirkungen summiren sich. Technisch findet dies Anwendung in der magnetoelektrischen Maschine von Ettingshausen.

Oder man legt um die Eisenmasse zwei Drahtspiralen. Durch die innere derselben wird ein Strom geleitet und dadurch in der äussern ein Strom inducirt. Auch dieser verdankt seinen Ursprung zwei in demselben Sinne wirkenden Ursachen: der Entstehung des Stromes in der innern Spirale und der plötzlichen Magnetisirung der weichen Eisenmasse. Indem wir den Strom abwechselnd öffnen und schliessen, werden inducirte Ströme entgegengesetzter Richtung hervorgerufen; deren Auftreten kann z. B. an Wärmewirkungen erkannt werden. Diese Einrichtung ist beim sogenannten Hammerapparat benutzt, wo das Oeffnen und Schliessen des Stromes durch den Magnet selbst bewirkt wird.

Wir können endlich auch hier einen inducirten Strom erzeugen, dessen Intensität constant ist. Wir benutzen den Ampèreschen Apparat, wo ein Leiterstück um einen Magnet rotirt, wenn ein Strom durch den Leiter fliesst; die Einrichtung wird durch umstehende Zeich-

nung deutlich gemacht. Statt einen Strom durch das Leiterstück fliessen zu lassen, drehen wir mechanisch das Leiterstück um die Axe und schalten an Stelle der Batterie einen Multiplicator in die Leitung ein; dann wird ein Strom in dem Leiter inducirt. Die Richtung dieses inducirten Stromes ist derjenigen entgegengesetzt, in welcher ein Strom fliessen müsste, damit durch die elektromagnetische Wirkung des Magnets auf den Strom das Leiterstück in demselben Sinne rotirte. Ferner folgt aus der Symmetrie in Bezug auf die Drehungsaxe, dass die Stärke des inducirten Stromes bei gleichförmiger Drehung constant sein muss; die Nadel des Multiplicators erhält also eine feste Ablenkung, deren Grösse durch die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmt wird.

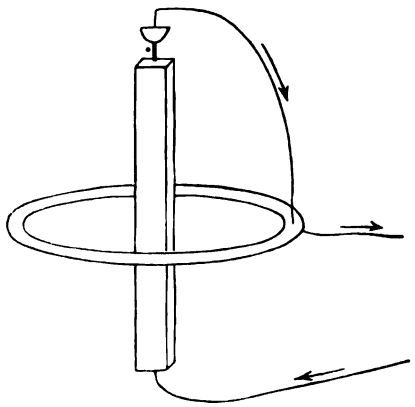


Fig. 67.

Wir haben hiemit einen genügenden Einblick in die Natur der Erscheinungen gewonnen, um die Theorie entwickeln zu können.

B. Theorie der inducirten Ströme.

§. 98.

Fünf allgemeine Sätze als Resultate der Erfahrung.

Wir entnehmen der Erfahrung eine Anzahl von allgemeinen Sätzen, welche wir der Theorie zu Grunde legen; diese fünf Sätze können als Resultate der Beobachtungen gelten, und wir gehen daher von einem sehr allgemeinen Standpunkt aus.*)

1) Inducirte Ströme entstehen jedes Mal, wo die virtuelle Wirkung des inducirenden Stromes auf den Leiter eine Aenderung erfährt.

Unter virtueller Wirkung verstehen wir diejenige Wirkung, welche der inducirende Strom auf den Leiter ausüben würde, wenn dieser

*) Die Theorie ist von F. Neumann in den beiden folgenden Abhandlungen entwickelt: Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme, vorgelesen in der Berliner Academie der Wissenschaften am 27. October 1845; Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme, vorgelesen am 9. August 1847.

letztere von einem elektrischen Strom durchflossen wäre. Die virtuelle Wirkung des Stromes auf den Leiter erfährt also eine Aenderung, wenn der Leiter oder der Strom bewegt, oder wenn die Intensität des Stromes verändert wird.

Die auf solche Weise inducirten Ströme haben vollständig den Charakter der gewöhnlichen elektrischen Ströme; sie wirken nach denselben Gesetzen auf eine Magnetnadel oder auf einen andern elektrischen Strom; sie sind auch den Ohmschen Gesetzen unterworfen in Bezug auf die elektromotorische Kraft und den Widerstand der Wege. Hierin liegt die Möglichkeit zu trennen, was dem Widerstand, und was der inducirten elektromotorischen Kraft angehört. Wir betrachten zunächst die letztere. Für dieselbe hat Lenz das folgende Gesetz aufgestellt und durch Beobachtung begründet:

2) Die inducirte elektromotorische Kraft ist unabhängig von der Substanz des Leiters.

Verbinden wir zwei ganz gleiche Spiralen, z. B. von Kupfer und von Neusilber, mit einem Multiplicator, und induciren wir Ströme in den Spiralen, so erhalten wir durch die eine, wie durch die andere Spirale genau denselben Ausschlag der Nadel, wenn dieselbe inducirende Wirkung ausgeübt wird. Besser winden wir die beiden Drähte neben einander auf einen Cylinder, und verbinden die Enden so mit den beiden Drähten eines sehr empfindlichen Differentialmultiplicators, dass die inducirten Ströme den letztern in entgegengesetzter Richtung durchfliessen; wir treffen ferner die Einrichtung, dass die Widerstände der beiden geschlossenen Leitungen genau gleich sind. Dann werden wir niemals eine Bewegung der Multiplicatornadel wahrnehmen, welche inducirende Wirkung wir auch auf die Doppelspirale ausüben mögen. Der Beweis des Satzes kann auf diesem Wege mit ausserordentlicher Schärfe geführt werden.

3) Unter sonst gleichen Umständen ist die elektromotorische Kraft der Geschwindigkeit proportional, mit welcher die Elemente bewegt werden.

Dieser Satz scheint mit dem in Widerspruch zu stehen, was wir oben wiederholt ausgesprochen haben: die Wirkung auf die Nadel soll bloss von der Anfangs- und von der Endposition abhangen, dagegen von dem Wege, auf welchem die Ueberführung stattfindet, und von der Geschwindigkeit völlig unabhängig sein. Aber der Ausdruck „unter gleichen Umständen" soll hier nicht bedeuten, dass Anfangs- und Endposition in den verglichenen Fällen gleich sei; sondern der Satz bezieht sich auf einen bestimmten Zeitpunkt und die Geschwindigkeit eines Elementes in diesem Zeitpunkt. Die zur Zeit t inducirte elektromotorische Kraft soll dieser Geschwindigkeit v proportional sein, also

auch die Stärke j des inducirten Stromes zur Zeit t proportional sein v, etwa

$$j = v\,F(x),$$

wo x eine Entfernung bedeutet. In den mit einander verglichenen Fällen soll dieses x gleich, v aber verschieden sein. Während der unendlich kleinen Zeit dt kann j als constant betrachtet und die Wirkung des inducirten Stromes während dieser Zeit proportional gesetzt werden dem Produkte

$$j\,dt = F(x)\,v\,dt = F(x)\,dx,$$

da $v = \frac{dx}{dt}$ ist. Der Ausschlag der Nadel wird durch die Summe der Wirkungen innerhalb der endlichen Zeit von t_1 bis t_2 bedingt; die entsprechenden Werthe von x, welche der Anfangs- oder Endposition angehören, seien x_1 und x_2; dann hängt der Ausschlag der Nadel von dem Integral ab:

$$\int_{t_1}^{t_2} j\,dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx,$$

also bloss von der Anfangs- und Endposition. Wir setzen hiebei voraus, dass die Bewegung in sehr kurzer Zeit beendet sei. So folgt aus dem dritten Satze gerade das Gesetz, welches wir oben als in den verschiedensten Fällen giltig hervorgehoben haben. Deshalb sind wir zu der Annahme berechtigt, dass der dritte Satz der Erfahrung entnommen sei.

Als vierten Satz nehmen wir das schon oben besprochene, von Lenz aufgestellte Gesetz für die Richtung des inducirten Stromes an, geben demselben aber eine etwas andere Form. Die Richtung des inducirten Stromes soll immer derart sein, dass die elektrodynamische Wirkung der beiden Ströme auf einander der inducirenden Bewegung einen Widerstand entgegensetzt. Denken wir uns den Leiter bewegt, so können wir sagen:

4) Die Componente nach der Richtung der Bewegung von der elektrodynamischen Wirkung, welche der inducirende Strom auf den inducirten ausübt, ist immer negativ.

Endlich folgt unmittelbar aus den sämmtlichen Beobachtungen der letzte Satz:

5) Unter sonst gleichen Umständen ist die inducirte Stromstärke der inducirenden proportional.

§. 99.

Ableitung des Ausdruckes für die inducirte elektromotorische Kraft.

Mittelst dieser fünf Sätze bilden wir einen Ausdruck für die inducirte Stromstärke und erhalten daraus die inducirte elektromotorische Kraft, den Fundamentalausdruck der T

Es sei ein Leiter derart in Bewegung, dass seine Elemente alle dieselbe Geschwindigkeit haben. Ferner bezeichne R die Wirkung des inducirenden Stromes auf die Längeneinheit des Leiters, wenn dieser von der Stromeinheit durchflossen wird. Dann ist die Wirkung auf das Leiterelement ds gleich Rds, und wenn wir die Stärke des inducirten Stromes gleich j setzen, die Wirkung des inducirenden Stromes auf das Element jds des inducirten

$$jRds.$$

Der Leiter bewegt sich in einer bestimmten Richtung mit der Geschwindigkeit v; mit dieser Richtung bilde die Kraft R den Winkel α; dann ist die Componente der Wirkung nach der Richtung der Bewegung

$$jRds\cos\alpha.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$R\cos\alpha = C;$$

die Componente der Gesammtwirkung erhalten wir durch Summirung über alle Elemente ds.

Nach dem dritten Satz ist nun j der Geschwindigkeit v proportional,

$$j = j'v,$$

und die Componente der Gesammtwirkung ergiebt sich gleich

$$j'v\int C\,ds,$$

wo v wesentlich positiv ist. Der Ausdruck soll nach dem vierten Satze immer negativ sein; das Integral $\int C\,ds$ über den ganzen geschlossenen Leiter kann ebensogut negativ, wie positiv sein. Folglich muss j' eine Function von $\int C\,ds$ sein, solcher Art, dass das Product immer negativ ist, und es kann auch aus dem ersten Satze gefolgert werden, dass in dem angenommenen Falle j' eine Function von $\int C\,ds$ sei. Soll nun das Product immer ein bestimmtes Vorzeichen haben, so muss j' eine ungerade Function von $\int C\,ds$ sein. Endlich folgt aus dem fünften Satze, dass j' eine lineare Function ist. Denn die Grösse C hat zum Factor J, die Stärke des inducirenden Stromes; nun soll aber j proportional J sein; demnach können wir setzen

$$j' = -K\int C\,ds,$$

wo K eine positive Grösse bedeutet.

Wir haben damit für die Stärke des inducirten Stromes den Ausdruck gefunden

$$j = -Kv\int C\,ds,$$

oder, da j dem Widerstand des Leiters umgekehrt proportional sein muss,

$$j = -\frac{\varepsilon}{w}v\int C\,ds,$$

wo ε eine Constante ist.

Bezeichnet ferner E die inducirte elektromotorische Kraft, bezogen auf die Einheit der Länge, so ist die in dem ganzen Leiter inducirte elektromotorische Kraft gleich $\int E\,ds$, und wir haben

$$j = \frac{1}{w} \int E\,ds,$$

folglich

$$\int E\,ds = -\varepsilon v \int C\,ds.$$

Diese Gleichung ist für jeden geschlossenen Leiter erfüllt, wenn die Elemente der Integrale auf beiden Seiten einander gleich sind; wir setzen daher

$$E\,ds = -\varepsilon v\, C\,ds,$$

oder

$$E = -\varepsilon v\, C.$$

Dies ist die Fundamentalformel unsrer Theorie; wir haben einen Ausdruck abgeleitet für die an der Stelle s des Leiters inducirte elektromotorische Kraft, bezogen auf die Einheit der Länge.

§. 100.

Einheit des Widerstandes. Allgemeine Bezeichnung; die Hauptfälle.

Aus den eben aufgestellten Formeln ergiebt sich ein sehr wichtiges Resultat, welches die ganze Theorie der Elektricität eine Stufe höher gehoben hat.

Wir haben für die Stärke j des inducirten Stromes die Gleichung erhalten:

$$j = -\frac{\varepsilon}{w} v \int C\,ds,$$

und hierin ist C proportional der Stärke des inducirten Stromes J, so dass

$$\int C\,ds = JZ,$$

wo Z eine Zahl bedeutet; denn wir haben, um Z zu erhalten, nach dem Ampèreschen Gesetz die Componente von der Wirkung zweier Ströme auf einander zu berechnen, wenn die Stromstärken eins sind. Mithin wird

$$jw = -\varepsilon v JZ,$$

oder

$$w = -\varepsilon Z \frac{J}{j} v.$$

In dieser Gleichung ist $Z\frac{J}{j}$ ein Zahlenwerth. Ferner soll die Grösse ε ganz unabhängig sein von der Natur des Leiters, nur bezüglich auf die elektrischen Flüssigkeiten. v ist eine Geschwindigkeit und wird gemessen in den Einheiten der Länge und der Zeit. Der Widerstand w endlich wird gewöhnlich in einer willkührlich gewählten Einheit ausgedrückt; man setzt den Widerstand eines bestimmten Drahtstücks oder einer bestimmten Quecksilbersäule gleich eins. Nehmen wir dies auch hier an, so wird der Zahlenwerth der universellen Constante ε durch diese willkührlich gewählte Widerstandseinheit bedingt.

Wir können aber zunächst festsetzen, dass die Constante ε eine Zahl sein soll. Dann wird der Widerstand w gleich dem Product einer Zahl in eine Geschwindigkeit. Setzen wir weiter

$$\varepsilon = 1,$$

so erhalten wir ein absolutes Maass für den Widerstand statt des relativen; der Widerstand wird nun gemessen in den Einheiten der Länge und der Zeit, wie eine Geschwindigkeit. Wir haben früher die Stromstärke in denselben Einheiten ausgedrückt. Diese absolute Bestimmung des Widerstandes ist eines der schönsten Resultate, welches Wilhelm Weber zuerst abgeleitet hat, von einem andern Ausgangspunkte, als wir, aber mittelst ganz ähnlicher Betrachtungen. —

Bevor wir zur Entwicklung der Theorie übergehen, führen wir eine übersichtliche Bezeichnung ein.

Wir wollen von nun an die ganze in dem Leiter inducirte elektromotorische Kraft mit E bezeichnen; dann ist nach dem, was wir eben gefunden haben,

$$E = -\varepsilon S C v ds, \tag{1}$$

wo das Zeichen S bedeutet, dass die Summe über alle Elemente ds des Leiters zu nehmen sei. Wir bezeichnen ferner das Product der Stromstärke in das Zeitelement dt mit D und nennen diesen Ausdruck den Differentialstrom; derselbe bestimmt die Wirkung, welche der inducirte Strom während der Zeit dt auf die Multiplicatornadel ausübt; in dem betrachteten Falle ist, da

$$D = \frac{1}{w} E\, dt,$$

$$D = -\frac{\varepsilon}{w} S C v ds \,.\, dt. \tag{2}$$

Weiter sollen alle Grössen, welche sich auf den inducirenden Strom, den Inducenten beziehen, mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden: das Element des Inducenten mit $d\sigma$, sein Ort mit ξ, η, ζ, das Wegelement, wenn der Inducent im Bewegung begriffen ist, mit $d\omega$. Die Stärke des inducirenden Stromes aber sei von nun an j.

Die entsprechenden Grössen für den Leiter dagegen bezeichnen wir mit den lateinischen Buchstaben, also

$$ds, \qquad x, y, z, \qquad do.$$

Wir unterscheiden auch drei Integrationen, die Summe Σ über alle Elemente $d\sigma$ des Inducenten, die Summe S über die Leiterelemente ds, drittens die Summe $\int$ über die Zeitelemente dt, welche in den zu betrachtenden Fällen auf Integrationen über die Wegelemente do und $d\omega$ zurückgeführt wird.

Endlich bedeute r die Entfernung der Elemente $d\sigma$ und ds, so dass

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

und die Richtung r werde von $d\sigma$ nach ds positiv gerechnet, so dass wie oben bei Betrachtung des Ampèreschen Gesetzes,

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \cos(r, ds) = \cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = -\cos(r, d\sigma) = -\cos\vartheta_1,$$

$$r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \sigma} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial \sigma} = -\cos\zeta,$$

wo ϑ den Winkel zwischen ds und r, ϑ_1 den Winkel zwischen $d\sigma$ und r, ζ den Winkel zwischen ds und $d\sigma$ bedeutet.

Wir betrachten zunächst die Induction, welche durch eine relative Ortsveränderung des Leiters gegen den Strom hervorgerufen wird, und dann sind drei Hauptfälle zu unterscheiden:

1) Der Inducent bleibt in Ruhe; der Leiter oder einzelne Theile desselben sind in Bewegung. Wir setzen bloss voraus, dass der Leiter fortwährend geschlossen bleibe; derselbe kann also seine Form beliebig ändern, neue Elemente aufnehmen, u. s. f.

2) Der Leiter bleibt in Ruhe, und die Stromelemente sind in beliebiger Bewegung.

3) Beide Bewegungen finden gleichzeitig statt.

Auf den vierten Fall, wo die Induction durch Aenderung der Stromstärke im Inducenten hervorgerufen wird, werden wir erst später eingehen.

§. 101.

Der Inducent bleibt in Ruhe; der Leiter wird bewegt.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo der Inducent in Ruhe bleibt, wo also

$$d\omega = 0,$$

und bilden die Componente nach der Richtung der Bewegung von derjenigen Wirkung, welche der inducirende Strom j auf die Längeneinheit des Leiters an der Stelle x, y, z ausübt. Nach dem Ampèreschen Gesetz ist die Wirkung gleich

$$-\sum \frac{j\,d\sigma}{r^2}\left(\cos\zeta - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta_1\right),$$

wo ζ den Winkel bedeutet, welchen die Elemente $d\sigma$ und ds mit einander bilden, ϑ und ϑ_1 dagegen die Winkel zwischen den Elementen und der Verbindungslinie r. Hieraus folgt für die oben mit C bezeichnete Grösse

$$C = -\sum \frac{j\,d\sigma}{r^2}\left(\cos\zeta - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta_1\right)\cos(r, do).$$

Das Leiterelement ds aber bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{do}{dt}$.

Demnach wird die in dem ganzen Leiter inducirte elektromotorische Kraft

$$E = \varepsilon \int\int \sum \frac{j}{r^2}\left(\cos\zeta - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta_1\right)\cos(r, do)\frac{do}{dt}\,d\sigma\,ds,$$

oder, wenn wir die Cosinus durch die Abgeleiteten von r ausdrücken,

$$(3)\qquad E = -\varepsilon \int\int \sum \frac{j}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial o}\frac{do}{dt}\,d\sigma\,ds.$$

Indem wir E durch den Widerstand W des Leiters dividiren, erhalten wir die Stärke des zur Zeit t inducirten Stromes; diese ändert sich rasch mit der Zeit und kann daher nur während eines unendlich kurzen Zeitraumes dt als constant betrachtet werden; innerhalb der Zeit dt übt der inducirte Strom eine Wirkung auf die Multiplicatornadel aus, welche dem Differentialstrom D, dem Product der Stromstärke in die Zeit dt, proportional ist. Wir erhalten D, indem wir E mit dt multipliciren und durch W dividiren:

$$(4)\qquad D = -\frac{\varepsilon}{W}\int\int \sum \frac{j}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial o}\,do\,d\sigma\,ds.$$

Wir lassen zunächst einige Voraussetzungen eintreten, welche dem Ausdruck eine einfachere Form geben, so dass seine wahre Natur deutlicher hervortritt.

Erstlich sei j unabhängig von σ, d. h. der inducirende Strom einfach und unverzweigt. Ferner sei nicht allein j, sondern auch der Widerstand W des Leiters unabhängig von der Zeit. Im Allgemeinen wird das nicht zutreffen; es können bei der Bewegung neue Elemente ein- und alte Elemente ausgeschaltet werden, und dann ändert sich der Widerstand. Wir schliessen eine solche Aenderung aus, oder wir nehmen an, es seien die Aenderungen im Vergleich mit dem Mittelwerth des gesammten Widerstandes so klein, dass sie ganz ausser Betracht fallen. Dann können wir die ganze Wirkung des inducirten Stromes auf die Magnetnadel einfach berechnen. Wir haben die Einzelwirkungen, welche während der Zeitelemente dt ausgeübt werden, zu summiren, d. h. in Bezug auf die Zeit über die endliche Dauer der Bewegung zu integriren; wie immer, wird dabei die Voraussetzung gemacht, dass diese endliche Zeit im Vergleich mit der Schwingungsdauer der Magnetnadel ausserordentlich klein sei; die Gesammtwirkung ergiebt sich proportional dem Integral des Differentialstromes in Bezug auf die Zeit, und diesen Ausdruck nennen wir den Integralstrom. Er werde im Folgenden immer mit J bezeichnet, so dass

$$J = \int D.$$

Setzen wir den oben für D gefundenen Werth ein, so folgt

$$(5)\qquad J = -\frac{\varepsilon j}{W}\int\int\int \sum \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial o}\,d\sigma\,ds\,do.$$

§. 102.

Umformung des dreifachen Integrales in die Summe von sechs Doppelintegralen.

Der Integralstrom wird im Wesentlichen bestimmt durch das dreifache Integral

$$\mathsf{E} = \int S \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial r}{\partial o} \, d\sigma \, ds \, do. \tag{6}$$

Dasselbe muss näher untersucht werden, und wir wollen das gleich für den allgemeinen Fall thun, wo die Integrationen Σ und S über nicht geschlossene Curven zu erstrecken sind.

Die Grenzen von σ seien σ_1 und σ_2, die von s s_1 und s_2, die von o o_1 und o_2. Dann kann das dreifache Integral auf eine Summe von sechs Doppelintegralen zurückgeführt werden.

Indem wir nämlich das erste Glied

$$\int S \Sigma \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial o} \, d\sigma \, ds \, do$$

partiell nach σ integriren, erhalten wir

$$\int S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial o} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds \, do - \int S \Sigma \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial o}}{\partial \sigma} \, d\sigma \, ds \, do,$$

oder, wenn wir die Differentiation unter dem dreifachen Integral ausführen,

$$\frac{\partial \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial o}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial o} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial o},$$

und dann den Werth einsetzen,

$$\mathsf{E} = \int S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial o} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds \, do - \int S \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial o} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial o} \right) \frac{\partial r}{\partial s} \, d\sigma \, ds \, do.$$

Das erste Glied fällt fort, wenn der Inducent geschlossen ist. Das dreifache Integral aber wird aus dem ursprünglichen Werth von E erhalten, indem man das Leiterelement ds und das Wegelement do vertauscht und das Vorzeichen umkehrt; die Grösse unter dem Integral ist gewissermaassen die Componente nach dem Leiterelement ds von der Wirkung des Stromelementes $d\sigma$ auf das andere Stromelement do. Wir werden später bei Besprechung der Weberschen Theorie diesem Ausdruck wieder begegnen.

Wir integriren das dreifache Integral weiter partiell nach o und erhalten

$$-S \Sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial s} \right]_{o_1}^{o_2} d\sigma \, ds + \int S \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial o} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial o} \right) \frac{\partial r}{\partial \sigma} \, d\sigma \, ds \, do;$$

aus diesem letztern dreifachen Integral aber wird durch partielle Integration nach s

$$\int \Sigma \left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial o}\right]_{s_1}^{s_2} d\sigma\, do - \int S\, \Sigma \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial o}\, d\sigma\, ds\, do.$$

Wir stossen also wieder auf das dreifache Integral, von dem wir ausgegangen sind; aber dasselbe hat das negative Vorzeichen. Somit folgt:

$$(7)\qquad E = \frac{1}{2}\int S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial o}\right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\, do - \frac{1}{2}\Sigma S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial s}\right]_{o_1}^{o_2} d\sigma\, ds + \\ + \frac{1}{2}\int \Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial o}\right]_{s_1}^{s_2} d\sigma\, do.$$

Die Umformung gilt allgemein; wir haben keine besondere Voraussetzung gemacht.

§. 103.

Betrachtung des Falles, wo der ganze Leiter bewegt wird.

Wir machen von der Umformung Gebrauch, um in dem angenommenen einfachen Fall den Integralstrom zu berechnen. Der Inducent ruht und bildet eine einfache geschlossene Curve; dann fallen die Werthe von r, $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial r}{\partial o}$ für $\sigma = \sigma_1$ und für $\sigma = \sigma_2$ zusammen, und das erste Doppelintegral fällt fort, so dass wir haben

$$E = -\frac{1}{2} S \Sigma \left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial s}\right]_{o_1}^{o_2} d\sigma\, ds + \frac{1}{2}\int \Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial o}\right]_{s_1}^{s_2} d\sigma\, do.$$

Der Leiter s soll auch immer geschlossen sein; aber da derselbe in Bewegung begriffen ist, brauchen die Stellen s_1 und s_2 nicht zusammenzufallen; damit hängt zusammen, dass die Geschwindigkeit $\frac{do}{dt}$ des einzelnen Elements sich nicht nothwendig stätig ändert von dem einen Elemente zum andern. Wir dürfen dann in dem dreifachen Integral nicht ohne Weiteres über die Stellen hinweg integriren, wo $\frac{do}{dt}$ sich sprungweise ändert. Fassen wir z. B. den Fall ins Auge, wo der Draht CDE ruht, dagegen ein anderes Drahtstück AB aus der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2 übergeführt wird, so ist $\frac{do}{dt}$ für alle Elemente des Stückes CDE gleich null, dagegen für die Stellen des

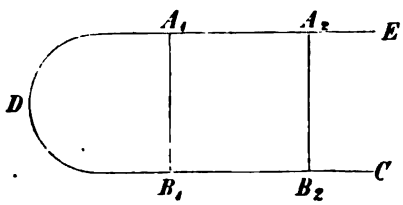


Fig. 68.

bewegten Stückes AB von null verschieden, und wir können in dem dreifachen Integral die Integration nach s auf das bewegte Stück AB beschränken; dann ist in Bezug auf s von s_1 bis s_2 zu integriren, wo s_1 der sogenannten Gleitstelle A, s_2 der andern Gleitstelle B entspricht. Nun fallen die Werthe von r, $\frac{\partial r}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial r}{\partial o}$ für $s = s_1$ und für $s = s_2$ durchaus nicht zusammen, und das letzte Doppelintegral verschwindet nicht.

Dagegen wird dieses Glied fortfallen, sobald die Elemente des Leiters im Laufe der Bewegung sich nicht ändern, also weder neue Elemente ein-, noch alte Elemente ausgeschaltet werden; dann sind $\frac{do}{dt}$, $\frac{\partial r}{\partial o}$ stätige Functionen von s, und wir erhalten

$$\mathsf{E} = -\frac{1}{2} \mathrm{S} \Sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial s}\right]_{o_1}^{o_2} d\sigma\, ds.$$

Wir können ferner durch eine einfache Transformation das Doppelintegral

$$\mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial s} d\sigma\, ds,$$

welches über die beiden geschlossenen Curven σ und s zu nehmen ist, auf ein uns schon bekanntes überführen. Wir haben nämlich

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \sigma} \frac{\partial . r^2}{\partial s},$$

so dass durch partielle Integration nach σ folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial s} d\sigma\, ds &= \frac{1}{2} \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r} \frac{\partial^2 . r^2}{\partial s \partial \sigma} d\sigma\, ds \\ &= -\mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}\right) d\sigma\, ds \\ &= -\mathrm{S} \Sigma \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} d\sigma\, ds. \end{aligned}$$

Dieses Integral bestimmt aber nach Früherem das Potential des geschlossenen Leiters σ auf den geschlossenen Leiter s, beide Leiter von dem Strome 1 durchflossen gedacht; wir fanden nämlich für dieses Potential $P_{\sigma,s}$ den Ausdruck (S. 110)

$$P_{\sigma,s} = -\frac{1}{2} \mathrm{S} \Sigma \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} d\sigma\, ds.$$

Bezeichnen wir den Werth dieses Potentiales für die Anfangsposition [illegible] s mit P_{σ,s_1}, für die Endposition dagegen mit P_{σ,s_2}, so wird

$$\mathsf{E} = -\{P_{\sigma,s_2} - P_{\sigma,s_1}\}$$

Folglich wird in dem betrachteten Falle, wo der ganze Leiter mit beliebiger Aenderung seiner Form, aber ohne Ein- und Ausschaltung von Elementen bewegt wird, der Integralstrom

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}(P_{\sigma,s_2} - P_{\sigma,s_1}); \tag{8}$$

der Integralstrom wird gleich dem Product von $\frac{\varepsilon j}{W}$ in den Unterschied von den Potentialen des Leiters σ auf den Leiter s in der Endposition und in der Anfangsposition. Demnach ist die Wirkung auf die Magnetnadel allein abhängig von der Anfangs- und Endposition des Leiters s, ganz unabhängig von der Art und Weise, wie die Ueberführung aus der einen Lage in die andere stattfindet. Dieses Resultat steht in völligem Einklang mit der Erfahrung.

Auch der Differentialstrom kann sehr einfach durch das Potential des Leiters σ auf den Leiter s ausgedrückt werden. Es folgt nämlich aus dem Obigen, dass, wenn $P_{\sigma,s}$ dieses Potential zu der beliebigen Zeit t während der Bewegung bezeichnet,

$$D = \frac{\varepsilon j}{W}\frac{dP_{\sigma,s}}{dt}\,dt; \tag{9}$$

wir brauchen nur statt der endlichen Zeit von t_1 bis t_2 das unendlich kleine Element dt von der Zeit t bis $t + dt$ als den Zeitraum der inducirenden Bewegung anzunehmen.

Aendern sich j und W mit der Zeit, so kann die Gleichung (8) für den Integralstrom nicht zur Anwendung gebracht werden, wohl aber die Gleichung (9) für den Differentialstrom; es würde daraus folgen

$$J = \varepsilon \int \frac{j}{W}\frac{dP_{\sigma,s}}{dt}\,dt.$$

Doch gilt diese Formel nur, wenn eine Aenderung der Stromstärke j ebensowenig, wie eine Aenderung des Widerstandes W, eine inducirende Wirkung ausübt; wir kommen auf diesen Punkt zurück und wollen hier nur bemerken, dass, weil eine Aenderung der Stromstärke j für sich allein einen Strom in dem Leiter s inducirt, die Formel (9) und also auch der daraus abgeleitete Werth des Integralstromes nicht gelten kann, wenn j sich ändert.

§. 104.

Bewegung des Leiters mit Gleitstellen.

Wir betrachten nun einen allgemeinern Fall. Der Inducent bleibt immer in Ruhe; dagegen soll nur ein Theil des Leiters bewegt werden, oder mehrere einzelne Theile, so dass andere Theile in Ruhe bleiben. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, welche wir schematisch folgendermaassen darstellen können:

Das Leiterstück AB werde von A_1B_1 nach A_2B_2 bewegt, so dass die ruhenden Theile der Bahn um A_1A_2 und um B_1B_2 vermehrt werden, während die bewegten Theile dieselben bleiben (Fig. 69).

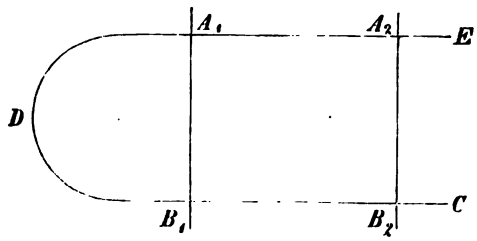


Fig. 69.

Oder es treten neue Elemente zu den ruhenden und ebenfalls neue Elemente zu den bewegten hinzu, wie das in der Fig. 70 angedeutet ist; indem das Leiterstück AB von A_1B_1 nach A_2B_2 bewegt wird, verwandelt sich die Bahn von $A_1B_1DA_1$ in $A_1A_2B_2B_1DA_1$.

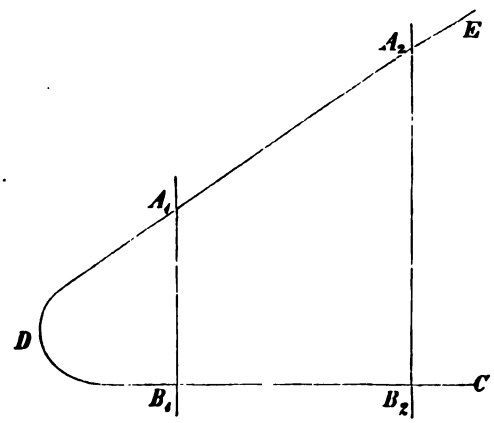


Fig. 70.

Die beiden Fälle sind deshalb zu unterscheiden, weil in dem ersten die Grenzen s_1 und s_2 von s feste Werthe haben, in dem zweiten dagegen mit der Zeit veränderliche.

Auch in diesen Fällen hebt sich aus dem Werthe (7) von E die erste Gruppe von Doppelintegralen fort, weil der Inducent ruht. Wir haben somit

$$\mathsf{E} = -\frac{1}{2}\mathrm{S}\,\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s}\right]_{o_1}^{o_2} d\sigma\,ds + \frac{1}{2}\int\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial o}\right]_{s_1}^{s_2} d\sigma\,do.$$

Betrachten wir den erstern Fall, und nehmen wir an, es werde ein Leiterstück AB aus der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2 gebracht, und die Länge von A bis B sei immer dieselbe, so ist die Bedeutung von E sehr einfach zu finden. Bezeichnet nämlich dp ein Längenelement des Curvenvierecks $A_1A_2B_2B_1A_1$, so giebt das erste Glied in dem Ausdruck E das halbe negative Integral von dem Ausdruck

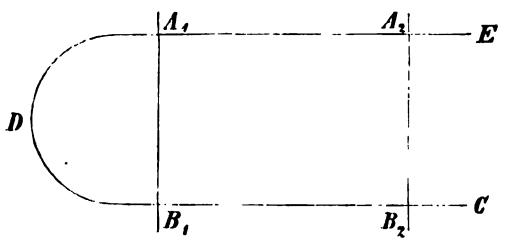


Fig. 71.

$$\sum \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\, d\sigma\, dp,$$

erstreckt über die Curve $A_2 B_2$, und das halbe positive Integral, erstreckt über die Curve $A_1 B_1$, das zweite Glied dagegen das halbe positive Integral, erstreckt über $A_1 A_2$, und das halbe negative Integral, erstreckt über $B_1 B_2$, die Integrale immer genommen von demselben Ausdruck. Folglich wird E gleich dem halben negativen Integral von

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\, d\sigma\, dp,$$

erstreckt über die geschlossene Curve σ und über das geschlossene Curvenviereck $A_1 A_2 B_2 B_1 A_1$, d. h. E ist dem Potential des Leiters σ auf das Curvenviereck entgegengesetzt gleich, also

$$E = - P_{\sigma, p},$$

wenn p im Index das Viereck bedeutet. Nun ist aber, wie unmittelbar ersichtlich,

$$P_{\sigma, p} = P_{\sigma, s_2} - P_{\sigma, s_1},$$

folglich der Integralstrom

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}\,(P_{\sigma, s_2} - P_{\sigma, s_1}),$$

so dass die Formel (8) auch in diesem Falle gilt.

Stillschweigend haben wir die Voraussetzung gemacht, dass die Widerstände der neu hinzugetretenen Theile $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gegen den Widerstand des ganzen Leiters verschwindend klein seien; wäre dies nicht der Fall, so könnten wir nur die Formel (9) für den Differentialstrom aufstellen

$$D = \frac{\varepsilon j}{W}\frac{dP_{\sigma, s}}{dt}\, dt;$$

der Integralstrom würde

$$J = \varepsilon j \int \frac{1}{W}\frac{dP_{\sigma, s}}{dt}\, dt. \tag{10}$$

Wir betrachten nun auch den zweiten Fall, wo nicht bloss zu den ruhenden, sondern auch zu den bewegten Theilen des Leiters neue Elemente hinzutreten. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, es finde das nur an der einen Schiene statt, an der Gleitstelle A, während die Gleitstelle B auf dem bewegten Stück AB ihre Lage nicht

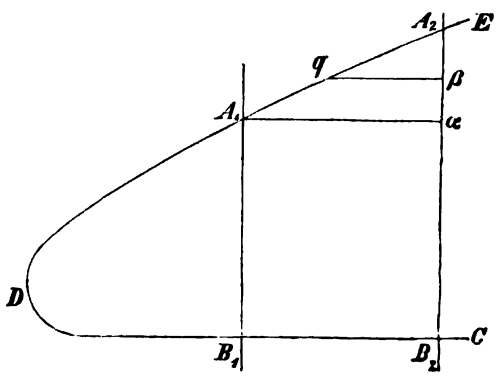


Fig. 72.

ändern soll. Wir ziehen die Linie $A_1\alpha$, welche das letzte von denjenigen bewegten Elementen beschreibt, die von Anfang bis zu Ende an der Bewegung theilnehmen. Dagegen bezeichnet $q\beta$ die Bahn eines Elementes, welches erst später in die Bewegung eintritt. Es wird E wieder durch die Gleichung bestimmt

$$\mathsf{E} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s}\right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\,ds + \frac{1}{2}\int^{\cdot}\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial o}\right]_{s_1}^{s_2} d\sigma\,do.$$

Jetzt umfasst das erste Glied die folgenden Theile:

Die Integrale von $\pm\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp$, genommen über die Strecken A_1B_1 und αB_2, welche für den Augenblick bezeichnet seien durch

$$-\frac{1}{2}\overset{B_2}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp + \frac{1}{2}\overset{B_1}{\underset{A_1}{\mathrm{S}}}\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp,$$

entsprechend den Elementen ds des bewegten Stücks, welche von Anfang bis zu Ende an der Bewegung theilnehmen.

Weiter für jedes Element ds, welches erst später in die Bewegung eintritt, einen Ausdruck von der Form

$$-\frac{1}{2}\left[\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s}\,d\sigma\,ds\right]_q^\beta;$$

von dem eingeklammerten Ausdruck soll der Werth für das Ende der Bahn β genommen und davon der Werth für den Anfang q abgezogen werden. Fassen wir alle diese Elemente zusammen, so bekommen wir einmal das negative Integral erstreckt über die Curve $A_2\alpha$,

$$-\frac{1}{2}\overset{\alpha}{\underset{A_2}{\mathrm{S}}}\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp,$$

und dann ein Integral über alle Stellen der ruhenden Schiene von A_1 bis A_2; aber unter diesem Integral stehen nicht die Elemente der Linie A_1A_2, sondern die Elemente des bewegten Stückes von A_2 bis α, wie sie nach und nach in den Leiter eintreten. Wir wollen diese Elemente für den Augenblick ds_1 nennen und das Integral bezeichnen durch

$$\frac{1}{2}\overset{q}{\mathrm{S}}\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s_1}\,d\sigma\,ds_1.$$

Das zweite Glied von E aber umfasst die beiden Integrale

$$\frac{1}{2}\overset{B_2}{\underset{B_1}{\mathrm{S}}}\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp$$

und

$$-\frac{1}{2}\overset{q}{\mathrm{S}}\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial o_1}\,d\sigma\,do_1,$$

wo do_1 das erste Wegelement für die Stellen bedeutet, welche zwischen A_1 und A_2 zu dem bewegten Stücke hinzutreten.

Folglich ergiebt sich

$$\mathsf{E} = -\frac{1}{2}\overset{B_2}{\underset{A_2}{S}}\sum\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp + \frac{1}{2}\overset{B_1}{\underset{A_1}{S}}\sum\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp +$$

$$+\frac{1}{2}\overset{B_2}{\underset{B_1}{S}}\sum\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp +$$

$$+\frac{1}{2}\overset{q}{S}\sum\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial s_1}\,d\sigma\,ds_1 - \frac{\partial r}{\partial o_1}\,d\sigma\,do_1\right).$$

Endlich ist aber, wenn dp das Element der Linie A_1A_2 bedeutet, etwa an der Stelle q,

$$dp = \frac{\partial p}{\partial o_1}\,do_1 - \frac{\partial p}{\partial s_1}\,ds_1,$$

weil wir auf dem bewegten Stück ds_1 in der Richtung von A nach B nehmen; folglich wird

$$\frac{\partial r}{\partial p}\,dp = \frac{\partial r}{\partial o_1}\,do_1 - \frac{\partial r}{\partial s_1}\,ds_1$$

und somit das letzte Glied in E gleich dem Integral

$$-\frac{1}{2}\overset{A_2}{\underset{A_1}{S}}\sum\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp.$$

Alle Glieder zusammen geben wieder das Integral von

$$-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial p}\,d\sigma\,dp,$$

genommen über das Curvenviereck $A_1A_2B_2B_1DA_1$, und damit ist die Gleichung (8) auch in diesem Falle als giltig erwiesen; es ist

$$\mathsf{E} = -(P_{\sigma,s_2} - P_{\sigma,s_1})$$

und

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}(P_{\sigma,s_2} - P_{\sigma,s_1}).$$

Wir haben aber noch nicht den allgemeinsten Fall betrachtet, der an einer Gleitstelle stattfinden kann; wir haben vorausgesetzt, dass ein Gleiten auf ruhender Schiene stattfinde; nun kann auch die Schiene in Bewegung begriffen sein. Doch wird dieser Fall leicht auf den eben behandelten zurückgeführt.

Wir nehmen das folgende Schema an: Das Leiterstück AB bewege sich von A_1B_1 nach A_2B_2, während das andere Leiterstück $C\alpha$ von C_1A_1 nach C_2A_2 gehe. Der geschlos-

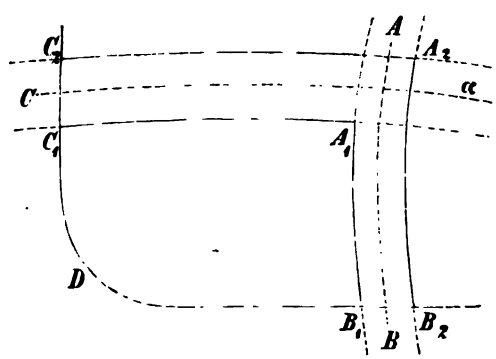


Fig. 73.

sene Leiter geht also aus dem Anfangszustand $A_1 B_1 D C_1 A_1$ in den Endzustand $A_2 B_2 B_1 D C_1 C_2 A_2$ über. Wenn wir nachweisen, dass die Gleichung (8) in diesem Falle gilt, so ist dieselbe für den allgemeinsten Fall abgeleitet; denn wir werden immer, wie auch der Leiter seine Lage und Form ändern mag, die Bewegung so auffassen können, dass wir eine endliche Anzahl von Gleitstellen A haben, und was wir von der einen beweisen, das gilt ebenso von jeder andern.

Wir könnten wieder die Bedeutung der Doppelintegrale aufsuchen, welche in dem Ausdruck vorkommen, und so den Satz auch in diesem Falle ableiten; wir wollen aber anders schliessen und von dem dreifachen Integral ausgehen, welches den Integralstrom darstellt.

Wir haben

$$J = -\frac{\varepsilon j}{W} \int \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial r}{\partial o} \frac{do}{dt} \, d\sigma \, ds \, dt,$$

und wir können in dem vorliegenden Falle annehmen, es bestehe J aus zwei Theilen, aus einem ersten, wo die Integration S in Bezug auf ds nur über das bewegte Stück AB, und aus einem zweiten, wo dieselbe Integration nur über $C\alpha$ erstreckt wird. Denn für alle Elemente ds, welche ruhenden Theilen des Leiters angehören, ist $\frac{do}{dt}$ gleich null.

Denken wir uns nun das Doppelintegral

$$-\mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial r}{\partial o} \frac{do}{dt} \, d\sigma \, ds$$

über den Inducenten σ und über das bewegte Stück AB ausgeführt, so ist dasselbe eine Function der Zeit; es habe zur Zeit t den Werth A, zur Zeit $t + \tau$, wo τ sehr klein sein soll, den Werth $A + A'\tau$; dann bedeutet A' den Werth der Abgeleiteten von dem Integral nach t zu der Zeit t. Wird dagegen das Integral über den Inducenten σ und über das bewegte Stück $C\alpha$ erstreckt, so sei der Werth $B + B'\tau$ für die Zeit $t + \tau$. Da wir beide Mal stätige Functionen der Zeit haben, so kann τ immer so klein gesetzt werden, dass die Entwicklung nach steigenden Potenzen von τ und die Vernachlässigung der höheren Glieder gestattet ist.

Wir berechnen den Integralstrom, welcher durch die Bewegung während der Zeit τ_1 erzeugt wird, und erhalten

$$J = \frac{\varepsilon j}{W} \int_0^{\tau_1} \{ A + B + (A' + B')\tau \} \, d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon j}{W} \left\{ (A + B)\tau_1 + \frac{1}{2} (A' + B')\tau_1^2 + \ldots \right\};$$

wenn wir also höhere Potenzen von τ_1 neben niedrigern vernachlässigen, so wird

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}(A + B)\tau_1 .$$

Denselben Werth erhalten wir aber auch, wenn wir uns zuerst das Stück AB in der Zeit $\frac{\tau_1}{2}$ aus der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2 übergeführt denken, während das Stück $C\alpha$ in der Lage C_1A_1 ruht, und dann wieder in der Zeit $\frac{\tau_1}{2}$ das Stück $C\alpha$ aus der Lage C_1A_1 in die Lage C_2A_2, während das Stück AB in der Lage A_2B_2 ruht. Wir denken uns beide Bewegungen ganz ähnlich, wie früher, nur mit der doppelten Geschwindigkeit ausgeführt, derart, dass nun $\frac{do}{dt}$ den doppelten Werth erhält. Wir haben dann bei Ausführung der ersten Bewegung den Integralstrom

$$J_1 = \frac{\varepsilon j}{W}\int_0^{\frac{\tau_1}{2}} 2(A + A_1\tau)\, d\tau$$

und bei Ausführung der zweiten Bewegung den Integralstrom

$$J_2 = \frac{\varepsilon j}{W}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau_1} 2(B + B_1\tau)\, d\tau ,$$

wo die Coefficienten A_1 und B_1 den in der frühern Formel eingesetzten A' und B' nicht nothwendig gleich sind. Denn die Grenzen der Integrationen in Bezug auf ds werden verschieden sein, je nachdem die beiden Bewegungen gleichzeitig oder nach einander ausgeführt werden, und die Unterschiede sind von der Ordnung τ. Vernachlässigen wir aber wieder die Glieder höherer Ordnung, so folgt

$$J_1 + J_2 = \frac{\varepsilon j}{W}(A + B)\tau_1 = J .$$

Damit ist bewiesen, dass derselbe Integralstrom erhalten wird, wenn wir die Bewegung der beiden Leiterstücke nach einander, statt gleichzeitig mit einander ausgeführt annehmen. In dem erstern Fall gilt aber der Integralsatz; denn wir haben in beiden Theilbewegungen ein Gleiten auf ruhenden Schienen, und für diesen Fall ist der Integralsatz bewiesen. Folglich gilt derselbe auch für ein Gleiten auf bewegten Schienen.

Allerdings ist die Voraussetzung gemacht, dass das Intervall τ_1 sehr klein sei; doch können wir uns von dieser Voraussetzung sofort befreien. Wir brauchen nur den Zeitraum der inducirenden Bewegung in eine grosse Zahl sehr kleiner Intervalle zu zerlegen. Für jedes

dieser Intervalle gilt der Satz; die Summe der in den einzelnen Intervallen erzeugten Wirkungen giebt die Gesammtwirkung; nehmen wir aber die Summe der Integralströme, welche in den einzelnen Intervallen erzeugt werden, so wird diese durch die Gleichung (8) bestimmt:

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}(P_{\sigma,s_2} - P_{\sigma,s_1}).$$

Denn all die Potentiale $P_{\sigma,s}$, welche sich auf Formen des Leiters s zwischen der Anfangsposition s_1 und der Endposition s_2 beziehen, heben sich aus der Summe fort. Nur die eine Voraussetzung ist wesentlich, dass der Widerstand W des Leiters s während der Bewegung keine merkliche Aenderung erleide. Wäre diese Voraussetzung nicht erfüllt, so würde zunächst nur die Formel (9) für den Differentialstrom gelten,

$$D = \frac{\varepsilon j}{W}\frac{dP_{\sigma,s}}{dt},$$

und daraus die Gleichung (10) für den Integralstrom folgen,

$$J = \varepsilon j \int \frac{1}{W}\frac{dP_{\sigma,s}}{dt}\,dt.$$

§. 105.

Fall eines verzweigten Leiters.

Wir haben bisher angenommen, der Leiter bilde einen einfachen geschlossenen Umgang. Wie verhält es sich nun, wenn der Leiter verzweigt ist? Auch in diesem Fall kann der in den verschiedenen Zweigen inducirte Strom mittelst der eben abgeleiteten Formeln bestimmt werden. Um das einzusehen, wird es genügen den folgenden einfachen Fall zu behandeln, wo die Anzahl der Verzweigungen zwei ist.

Der Leiter bestehe aus dem einfachen geschlossenen Umgang $ACBD$, ferner aus einem Leiterstück AB, welches aus der Lage A_1B_1 in die andere A_2B_2 übergeführt werde; dabei kann der Umgang $ACBD$ in Ruhe bleiben oder gleichfalls bewegt werden, auch mit Aenderung seiner Form.

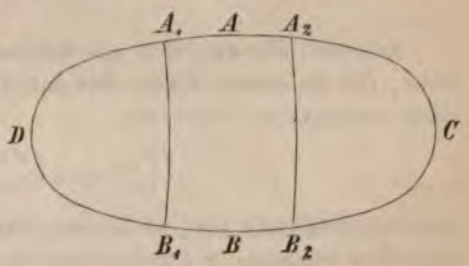


Fig. 74.

Um den inducirten Strom zu erhalten, zerlegen wir den Leiter in eine Anzahl einfacher Umgänge; die oben abgeleiteten Formeln liefern uns die zu jeder Zeit in den verschiedenen einfachen Umgängen inducirten elektromotorischen Kräfte; aus diesen folgen durch Anwendung des Kirchhoffschen Satzes die Stromstärken. In einem Falle, wie dem vorliegenden, darf nicht angenommen werden, dass die Widerstände der einzelnen einfachen Umgänge unverändert bleiben; deshalb können

wir nicht unmittelbar die Integralströme berechnen, sondern zunächst nur die Differentialströme, d. h. die Integralströme, welche durch eine unendlich kleine Bewegung erzeugt werden.

Wir nehmen daher an, es gehe das bewegliche Leiterstück aus der Lage AB in die unendlich wenig verschiedene Lage $A'B'$ über, und betrachten die beiden einfachen Umgänge $ABCA$ und $ABDA$. Diese einfachen Umgänge bezeichnen wir mit s' und s''; sie ändern sich mit der Zeit; $P_{\sigma,s'}$ und $P_{\sigma,s''}$ sind also Functionen der Zeit. Ferner sei der Differentialstrom in AB D, in BCA D_1, in BDA D_2, der Widerstand von einem jeden der drei Stücke W, W_1, W_2; die Ströme werden in der Richtung der Pfeiler positiv gerechnet. Wir erhalten die Gleichungen

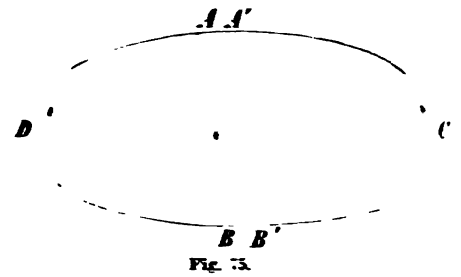


Fig. 53.

$$D = D_1 + D_2,$$

$$DW + D_1 W_1 = \varepsilon j \frac{dP_{\sigma,s'}}{dt}\, dt,$$

$$DW + D_2 W_2 = \varepsilon j \frac{dP_{\sigma,s''}}{dt}\, dt.$$

Hieraus können wir die Werthe von D, D_1, D_2 berechnen, und durch Integration über die Zeit t folgen schliesslich die Integralströme in den drei Stücken

$$J = \int_{t_1}^{t_2} D, \qquad J_1 = \int_{t_1}^{t_2} D_1, \qquad J_2 = \int_{t_1}^{t_2} D_2.$$

Nehmen wir an, der geschlossene Umgang $ACBDA$ bleibe in Ruhe, die Induction werde also durch Bewegung des Leiterstückes AB allein erzeugt, so haben wir

$$\frac{dP_{\sigma,s'}}{dt}\, dt = \frac{dP_{\sigma,s''}}{dt}\, dt;$$

denn beide Werthe sind gleich dem Potential des Inducenten σ auf den einfachen Umgang $AA'B'BA$, der eine unendlich kleine Fläche einschliesst. Die Gleichungen geben dann

$$D_1 = \varepsilon j \frac{W_2}{W_1 W_2 + W(W_1 + W_2)} \frac{dP_{\sigma,s'}}{dt}\, dt,$$

$$D_2 = \varepsilon j \frac{W_1}{W_1 W_2 + W(W_1 + W_2)} \frac{dP_{\sigma,s'}}{dt}\, dt,$$

$$D = \varepsilon j \frac{W_1 + W_2}{W_1 W_2 + W(W_1 + W_2)} \frac{dP_{\sigma,s'}}{dt}\, dt.$$

§. 106.

Der inducirende Strom ist verzweigt.

Wir müssen auch noch den andern wichtigen Fall ins Auge fassen, wo der Inducent verzweigt ist; für diesen Fall ist das Potential des Inducenten auf den Leiter s, welchen letztern wir unverzweigt annehmen, zu definiren. Wir haben früher gezeigt, dass ein verzweigter Strom immer als eine Summe von einfachen Strömen kann aufgefasst werden; dann besteht der jetzt zu betrachtende Fall einfach darin, dass statt eines einzigen eine grössere Zahl von einfachen geschlossenen Strömen inducirend wirken, und die Gesammtwirkung ist die Summe der einzelnen Wirkungen; wir können auch sagen: das Potential des Stromes auf den Leiter s ist gleich der Summe von den Potentialen der einzelnen einfachen Ströme auf denselben Leiter s.

Wir betrachten den bestimmten Fall, welcher durch die Figur 76 angedeutet ist. Die drei einfachen Umgänge sind $\alpha\beta\zeta\alpha$, $\alpha\beta\gamma\varepsilon\zeta\alpha$, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\alpha$; der Sitz der elektromotorischen Kraft liege in α, und diese Kraft sei gleich K; endlich sollen die Widerstände in den Stücken die in der Figur angegebenen Werthe haben: u, u_1, u_2, u_3, w_1, w_2. Dann gelten für die Stromstärken j_1, j_2, j_3 in den drei einfachen Umgängen die Gleichungen:

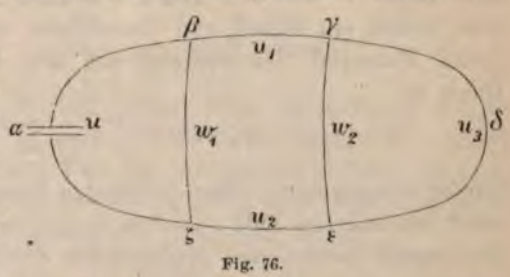


Fig. 76.

$$
\begin{aligned}
(j_1 + j_2 + j_3)\,u + j_1 w_1 &= K,\\
(j_1 + j_2 + j_3)\,u + (j_2 + j_3)\,(u_1 + u_2) + j_2 w_2 &= K,\\
(j_1 + j_2 + j_3)\,u + (j_2 + j_3)\,(u_1 + u_2) + j_3 u_3 &= K,
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
j_1(u + w_1) \quad &+ \quad j_2 u \quad + \quad j_3 u \quad &= K,\\
j_1 u + j_2 (u + u_1 + u_2 + w_2) &+ j_3 (u + u_1 + u_2) \quad &= K,\\
j_1 u + j_2 (u + u_1 + u_2) \quad &+ j_3 (u + u_1 + u_2 + u_3) &= K.
\end{aligned}
$$

Die Determinante aus den Coefficienten von j_1, j_2, j_3 in den drei Gleichungen ist symmetrisch; daraus folgt, dass diese Gleichungen aussagen, ein gewisser Ausdruck sei ein Maximum oder Minimum; man kann eine solche Bedingung aufstellen, welche die Gleichungen für die Stromstärken liefert. Hier machen wir nur beiläufig darauf aufmerksam. Wenn die betreffende Determinante nicht verschwindet, — und das ist nach ihrer Form nicht möglich, — so erhalten wir drei bestimmte Werthe für j_1, j_2, j_3; die Formeln brauchen wir nicht aufzustellen. Es wirken also drei Ströme in den drei einfachen Umgängen,

welche durch σ', σ'', σ''' bezeichnet seien, inducirend auf den Leiter s, und der Integralstrom, welcher durch alle drei Ströme in dem Leiter s inducirt wird, ergiebt sich als Summe der drei Integralströme

$$J = \frac{\varepsilon j_1}{W}(P_{\sigma',s_2} - P_{\sigma',s_1}) + \frac{\varepsilon j_2}{W}(P_{\sigma'',s_2} - P_{\sigma'',s_1}) + \frac{\varepsilon j_3}{W}(P_{\sigma''',s_2} - P_{\sigma''',s_1}).$$

Von dieser Formel ausgehend können wir den Begriff von dem Potential eines Stromes auf einen Leiter verallgemeinern. Wir haben bisher das Potential des einfachen geschlossenen Leiters σ auf den Leiter s definirt, indem wir beide Leiter uns von dem Strome eins durchflossen dachten; hienach war

$$P_{\sigma,s} = -\frac{1}{2}\mathrm{S}\sum \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} d\sigma\, ds.$$

Wir wollen nun den Ausdruck $j P_{\sigma,s}$ das Potential des Stromes j in dem Leiter σ auf den Leiter s nennen, so dass bloss in dem letztern Leiter ein Strom von der Stärke eins angenommen wird, und dieses Potential des Stromes auf den Leiter mit $Q_{\sigma,s}$ bezeichnen. Dann ist

$$Q_{\sigma,s} = j P_{\sigma,s} = -\frac{1}{2} j\,\mathrm{S}\sum \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} d\sigma\, ds,$$

immer vorausgesetzt, dass die beiden Leiter unverzweigt seien. In dem eben betrachteten Fall von drei einfachen Umgängen ist das Potential des ganzen verzweigten inducirenden Stromes auf den Leiter s gleich der Summe von den Potentialen der drei einfachen Ströme j_1, j_2, j_3 auf denselben Leiter s, also

$$Q_{\sigma,s} = j_1 P_{\sigma',s} + j_2 P_{\sigma'',s} + j_3 P_{\sigma''',s},$$

und die Summe von drei Gliedern kann durch das Doppelintegral ausgedrückt werden

$$Q_{\sigma,s} = -\frac{1}{2}\mathrm{S}\sum \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} j\, d\sigma\, ds,$$

wenn die Integration in Bezug auf $d\sigma$ über alle Elemente $d\sigma$ des verzweigten Leiters erstreckt wird, jedes Element mit derjenigen Stromstärke j multiplicirt, welche dem betreffenden Theile des verzweigten Stromes entspricht. Dann wird der Integralstrom auch jetzt durch die einfache Formel bestimmt

$$J = \frac{\varepsilon}{W}\{Q_{\sigma,s_2} - Q_{\sigma,s_1}\}, \tag{11}$$

welche Formel in all den Fällen gilt, wo der Inducent ruht und der unverzweigte Leiter s eine beliebige Aenderung in Bezug auf Lage und Form erhält.

Damit ist der Fall, wo der Leiter bewegt wird, ganz allgemein behandelt.

§. 107.

Der Inducent ist in Bewegung, während der Leiter ruht.

Der zweite Hauptfall, wo der Leiter ruht, dagegen der Inducent beliebig bewegt wird, kann auf den ersten zurückgeführt werden.

Das Element $d\sigma$ bewege sich in der Richtung $d\omega$ mit der Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$, und die Richtung $d\omega$ bilde mit der Verbindungslinie r von $d\sigma$ und ds den Winkel ζ. Dann bleibt die relative Bewegung von $d\sigma$ und ds dieselbe, wenn wir $d\sigma$ ruhen, dagegen ds in der Richtung $d\omega$ sich mit der Geschwindigkeit $-\frac{d\omega}{dt}$ bewegen lassen. Durch diese letztere Bewegung wird aber, wie wir oben gesehen haben, in dem Leiterelement ds die elektromotorische Kraft inducirt (nach Gl. 3, S. 274)

$$+\varepsilon j \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\cos\zeta\,\frac{d\omega}{dt}\,d\sigma\,ds.$$

Nehmen wir nun an, dass die Elementarwirkung allein durch die relative Bewegung der Elemente gegen einander bedingt werde, so gilt der Werth auch für den erstern Fall, wo ds ruht und $d\sigma$ bewegt wird, und daraus folgt für die ganze durch Bewegung des Inducenten σ in dem Leiter s inducirte elektromotorische Kraft der Werth

$$E = \varepsilon j \,\mathrm{S}\,\Sigma \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\cos\zeta\,\frac{d\omega}{dt}\,d\sigma\,ds.$$

Ferner ist jetzt

$$\cos\zeta = -\frac{\partial r}{\partial\omega},$$

weil $d\sigma$ bewegt wird und die Richtung r von $d\sigma$ nach ds soll genommen werden. Folglich erhalten wir die zur Zeit t inducirte elektromotorische Kraft

$$E = -\varepsilon j \,\mathrm{S}\,\Sigma \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dt}\,d\sigma\,ds,$$

hieraus den Differentialstrom

$$D = -\frac{\varepsilon j}{W}\,\mathrm{S}\,\Sigma \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial\omega}\,d\omega\,d\sigma\,ds,$$

und endlich den Integralstrom

$$J = -\frac{\varepsilon j}{W}\int \mathrm{S}\,\Sigma \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial\omega}\,d\sigma\,ds\,d\omega,$$

so dass in den Gleichungen (3), (4) und (5) nur das eine Wegelement do durch das andere $d\omega$ zu ersetzen ist.

Das dreifache Integral, welches in dem Werth von J vorkommt, kann nun gerade so umgeformt werden, wie das früher betrachtete. Wir finden so:

$$J=-\frac{\varepsilon j}{2W}\left\{\int\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]_{s_1}^{s_2}d\sigma\,d\omega-\mathrm{S}\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s}\right]_{\omega_1}^{\omega_2}d\sigma\,ds+\int\Sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]_{\sigma_1}^{\sigma_2}ds\,d\omega\right\}.$$

und das erste Glied fällt fort, weil der Leiter s in Ruhe bleiben soll. Wird ferner der Inducent σ bewegt, ohne dass Elemente ein- oder austreten, so verschwindet auch das letzte Glied; endlich ist

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\Sigma\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,\frac{\partial t}{\partial s}\,d\sigma\,ds$$

gleich dem Potential des Leiters σ auf den Leiter s. Folglich wird in diesem Falle

$$J=\frac{\varepsilon j}{W}\left(P_{\sigma_2,s}-P_{\sigma_1,s}\right),$$

wo die Zeichen σ_1, σ_2 in den Indices von P den einfachen geschlossenen Umgang des Inducenten am Anfang und am Ende der Bewegung bezeichnen.

Werden einzelne Stücke des Stromes bewegt, etwa mit Gleitstellen, so führt eine ganz ähnliche Betrachtung, wie die oben angestellte, zu derselben Endformel; der Integralstrom wird immer gleich dem Product von $\frac{\varepsilon j}{W}$ in den Unterschied der Potentiale $P_{\sigma_2,s}$ und $P_{\sigma_1,s}$. Hiebei ist aber die Voraussetzung gemacht, dass die Stromstärke j im Inducenten unverändert bleibe.

Wenn der Leiter s verzweigt ist, so muss der Satz auf jeden einzelnen einfachen Umgang zur Anwendung gebracht werden. Ist dagegen der Inducent verzweigt, so kann derselbe als ein System von einfachen Strömen betrachtet werden; wir bringen wieder den Satz unmittelbar zur Anwendung, indem wir das verallgemeinerte Potential $Q_{\sigma,s}$ des Stromes σ auf den Leiter s einführen. Doch muss hier besonders beachtet werden, dass bei Ableitung des Satzes angenommen ist, die Stromstärke des Inducenten bleibe unverändert; diese Bedingung muss nun erfüllt sein in Bezug auf jeden einfachen Umgang des Inducenten, also auch in Bezug auf jedes einzelne Stück des inducirenden Stromes.

§. 108.

Die Leiterelemente und die Stromelemente sind gleichzeitig in Bewegung.

Auch der dritte Hauptfall, wo die Leiterelemente und die Stromelemente gleichzeitig bewegt werden, kann auf den ersten und zweiten, also auf den ersten zurückgeführt werden.

Wir nehmen an, dass dieselbe elektromotorische Kraft durch Bewegung des Elementes ds gegen das Element $d\sigma$ in dem erstern Element inducirt werde, möge nun das letztere Element ruhen oder nicht, und ebenso, dass dieselbe elektromotorische Kraft durch Bewegung

von $d\sigma$ gegen ds in ds inducirt werde, möge nun ds ruhen oder auch bewegt werden, m. a. W. während jedes Zeitelementes dt soll bei gleichzeitiger Bewegung beider Leiter in dem Leiterelement ds eine elektromotorische Kraft inducirt werden, welche der Summe der beiden Kräfte gleich ist, die aus der Bewegung eines jeden von beiden Leitern allein entspringen. Wir erhalten dann für den Integralstrom den Werth

$$J = -\frac{\varepsilon j}{W}\left\{\int \mathrm{S}\,\Sigma\, R\,\frac{d\sigma}{dt}\,d\sigma\,ds\,dt + \int \mathrm{S}\,\Sigma\, \mathsf{P}\,\frac{d\omega}{dt}\,d\sigma\,ds\,dt\right\}.$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$R = \frac{1}{r^2}\left(r\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial o},$$

$$\mathsf{P} = \frac{1}{r^2}\left(r\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial r}{\partial\omega}.$$

Wir zeigen, dass die Summe der beiden dreifachen Integrale durch die Differenz von den Werthen zweier Doppelintegrale kann ausgedrückt werden.

Zu diesem Ende denken wir uns die Integrationen in Bezug auf $d\sigma$ und ds ausgeführt für die beliebige Zeit t; die negativen Doppelintegrale $S\Sigma$ sind dann Functionen der Zeit; ihre Werthe seien A und B für die Zeit t; bedeuten ferner A' und B' die Abgeleiteten nach der Zeit, so haben wir zur Zeit $t+\tau$

$$-\mathrm{S}\,\Sigma\, R\,\frac{do}{dt}\,d\sigma\,ds = A + A'\tau,$$

$$-\mathrm{S}\,\Sigma\, \mathsf{P}\,\frac{d\omega}{dt}\,d\sigma\,ds = B + B'\tau,$$

vorausgesetzt, es sei τ so klein, dass wir höhere Potenzen, von τ^2 an, vernachlässigen können. Daraus folgt für den Integralstrom, welcher durch die Bewegung während der Zeit τ_1 von t bis $t+\tau_1$ erzeugt wird, der Werth

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}\left\{\int_0^{\tau_1}(A + A'\tau)\,d\tau + \int_0^{\tau_1}(B + B'\tau)\,d\tau\right\},$$

oder

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}(A + B)\tau_1,$$

bei Vernachlässigung von τ_1^2.

Wir wollen nun annehmen, dass zuerst die Leiterelemente allein bewegt werden, mit doppelter Geschwindigkeit, sonst ganz ebenso wie früher; der Leiter gelangt dann während der Zeit $\frac{\tau_1}{2}$ von der Anfangs- in die Endposition, und der durch die Bewegung erzeugte Integralstrom wird durch einen Ausdruck bestimmt von der Form

$$J' = \frac{\varepsilon j}{W}\int_0^{\frac{\tau_1}{2}} 2\,(A + A_1\tau)\,d\tau,$$

wo A denselben Werth hat, wie in der obigen Formel, A_1 aber von A' verschieden sein kann. Vernachlässigen wir wieder τ_1^2, so folgt

$$J' = \frac{\varepsilon j}{W} A \tau_1 .$$

Zweitens soll der Inducent, wieder in der Zeit $\frac{\tau_1}{2}$, aus der Anfangs- in die Endposition gebracht werden, während der Leiter s ruht, und das geschehe wieder durch eine Bewegung mit der doppelten Geschwindigkeit, wie früher. Wir erhalten dann den zweiten Integralstrom

$$J'' = \frac{\varepsilon j}{W} \int_{\frac{\tau_1}{2}}^{\tau_1} 2 (B + B_1 \tau)\, d\tau,$$

wo B denselben Werth haben muss, wie oben, während B_1 von B' verschieden ist. Bei derselben Vernachlässigung wird

$$J'' = \frac{\varepsilon j}{W} B \tau_1 .$$

Hieraus folgt $$J' + J'' = J;$$

wir erhalten denselben Integralstrom, mögen die beiden Bewegungen gleichzeitig oder nach einander ausgeführt werden.

Geschieht aber das Letztere, so haben wir den ersten und den zweiten Hauptfall, und wenn wieder s_1, s_2, σ_1, σ_2 die Anfangs- und Endpositionen der beiden Leiter bezeichnen, so ist

$$J' = \frac{\varepsilon j}{W} \left(P_{\sigma_1, s_2} - P_{\sigma_1, s_1} \right),$$

$$J'' = \frac{\varepsilon j}{W} \left(P_{\sigma_2, s_2} - P_{\sigma_1, s_2} \right).$$

Folglich wird

$$J = \frac{\varepsilon j}{W} \left(P_{\sigma_2, s_2} - P_{\sigma_1, s_1} \right).$$

Dieses Resultat ist unter der Annahme erhalten, dass die inducirende Bewegung ausserordentlich schnell geschehe; dieselbe darf nur eine Zeit τ_1 in Anspruch nehmen, deren Quadrat verschwindend klein ist. Allein diese Voraussetzung ist nicht wesentlich; wir brauchen nicht unmittelbar die Bewegung in dem ganzen Zeitraum zu betrachten; sondern wir können diesen Zeitraum in beliebig viele Theile zerlegen und vorerst nur ein solches Element behandeln. Dies kommt darauf hinaus, nicht unmittelbar den Integralstrom, sondern zunächst den Differentialstrom zu berechnen, und wir finden dann auf dem Wege, den wir eingeschlagen haben, auch bei gleichzeitiger Bewegung von Inducent und Leiter die Gleichung (9):

$$D = \frac{\varepsilon j}{W} \frac{dP_{\sigma, s}}{dt}\, dt,$$

und endlich durch Integration nach der Zeit die Gleichung (10):

$$J = \varepsilon \int \frac{j}{W} \frac{dP_{\sigma,s}}{dt} dt.$$

Diese Gleichung giebt auch für den Fall, wo j und W sich mit der Zeit ändern, einen bestimmten Werth für J. Allein der Integralstrom wird in diesem Fall nur den angegebenen Werth besitzen, wenn eine Aenderung der Stromstärke im Inducenten ebensowenig eine inducirende Wirkung ausübt, wie es eine Aenderung in dem Widerstande W des Leiters für sich allein thut.

§. 109.

Induction durch Intensitätsänderung.

Wir wissen jedoch aus der Erfahrung, dass eine blosse Aenderung der Stromstärke im Inducenten eine inducirende Wirkung ausübt. Dem müssen wir noch Rechnung tragen. Und wenn schon die bis jetzt zur Anwendung gebrachten Principien diesen Fall nicht umfassen, so können wir doch, allerdings durch eine nicht vollkommen strenge Schlussfolgerung, aus dem Vorhergehenden die Induction in diesem Falle ableiten.

Wir haben angenommen, dass die durch Bewegung inducirte elektromotorische Kraft allein abhange von der Aenderung in der elektrodynamischen Wirkung auf den von dem Strome 1 durchflossenen Leiter, und sind von diesem Grundsatze aus zu Folgerungen gelangt, welche mit der Erfahrung in Einklang stehen, namentlich zu dem Satze, dass der inducirte Integralstrom unabhängig sei von der Art, wie die Aenderung in der elektrodynamischen Wirkung zu Stande komme. Bringen wir einen Strom σ aus sehr grosser Entfernung in die Nähe des geschlossenen Leiters s, so ist der Integralstrom

$$J = \frac{\varepsilon j}{W} P_{\sigma,s}, \tag{12}$$

wo $P_{\sigma,s}$ das Potential der beiden Leiter auf einander in der Endposition bezeichnet; denn für die Anfangsposition ist dieses Potential gleich null.

Nun ist aber die Aenderung in der elektrodynamischen Wirkung genau dieselbe, wenn wir nicht den vorhandenen Strom σ aus grosser Entfernung neben den Leiter s bringen, sondern in dem Leiter σ, der in der Endlage neben s liegt, den Strom j plötzlich entstehen lassen. Auf die letztere Weise muss also derselbe Strom inducirt werden, und die Formel (12) gilt auch für diesen Fall.

Weiter folgt sehr einfach die allgemeine Formel für jede Intensitätsänderung. Nehmen wir an, es sei in dem Inducenten der Strom j vorhanden, und plötzlich werde die Stromstärke in j_1 verwandelt, so haben wir dasselbe, wie wenn zu dem vorhandenen Strom j ein zweiter

in einem gleich geformten Leiter fliessender von der Stärke $j_1 - j$ aus unendlich grosser Entfernung hinzugefügt würde; folglich ist der Integralstrom in diesem Falle

$$J = \frac{\varepsilon}{W}(j_1 - j)\, P_{\sigma,s},$$

und wenn die Aenderung in der Stromstärke unendlich klein ist, gleich dj, so erhalten wir durch diese Aenderung einen unendlich kleinen Integralstrom, d. h. den Differentialstrom

$$D = \frac{\varepsilon}{W} P_{\sigma,s}\, dj. \tag{13}$$

Wir betrachten endlich den Fall, dass Orts- und Intensitätsveränderungen gleichzeitig stattfinden. Dann werden während eines Zeitelementes dt der Leiter und der Inducent eine Ortsveränderung und der inducirende Strom eine Intensitätsveränderung erleiden; in dem Leiter s aber wird durch die erstere Ursache die elektromotorische Kraft inducirt

$$\varepsilon j \frac{dP_{\sigma,s}}{dt},$$

und durch die letztere

$$\varepsilon P_{\sigma,s} \frac{dj}{dt};$$

folglich wird die ganze zur Zeit t in dem Leiter s inducirte elektromotorische Kraft

$$E = \varepsilon \frac{d.jP_{\sigma,s}}{dt} = \varepsilon \frac{dQ_{\sigma,s}}{dt}; \tag{14}$$

hieraus folgt der Differentialstrom

$$D = \frac{\varepsilon}{W} \frac{d.jP_{\sigma,s}}{dt}\, dt = \frac{\varepsilon}{W} \frac{dQ_{\sigma,s}}{dt}\, dt,$$

wenn der Widerstand des Leiters W ist, und endlich der Integralstrom

$$J = \frac{\varepsilon}{W}\left(j_2 P_{\sigma_2,s_2} - j_1 P_{\sigma_1,s_1}\right) = \frac{\varepsilon}{W}\left(Q_{\sigma_2,s_2} - P_{\sigma_2,s_2}\right);$$

der Integralstrom ist gleich dem Product von $\frac{\varepsilon}{W}$ in den Unterschied von den Potentialen des inducirenden Stromes auf den Leiter am Ende und am Anfang. Hiebei ist angenommen, dass in dem Leiter ein Strom von der Stärke eins fliesse, während die Stromstärke im Inducenten am Anfang und am Ende die gegebenen Werthe haben soll.

Dies ist das allgemeine Princip der Induction. Vorausgesetzt ist nur, dass der Widerstand W des Leiters sich nicht merklich ändere.

§. 110.

Bemerkung über den Extracurrent.

An die zuletzt durchgeführte Untersuchung würde sich eine Betrachtung des Extracurrent am Geeignetsten anschliessen; doch können wir dies hier nur ganz kurz andeuten.

Wir betrachten den Extracurrent, der in dem Moment entsteht, wo die Kette geöffnet wird; die Stromstärke verwandelt sich dann von j in 0, so dass die Aenderung $-j$ beträgt; dadurch wird in dem Leiter σ des Stromes selbst der Integralstrom erzeugt,.

$$J = -\frac{\varepsilon j}{w} P_{\sigma,\sigma},$$

wo w den Widerstand des geschlossenen Leiters σ, $P_{\sigma,\sigma}$ aber das Potential dieses Leiters auf sich selbst bedeutet.

Wir haben in der Uebersicht über die Inductionserscheinungen (S. 262) ein Mittel angegeben, um einen solchen Extracurrent zu messen; am Besten beobachtet man den Ausschlag der Nadel im Differentialmultiplicator; daraus kann der Werth von J berechnet werden.

Beim Schliessen der Kette bewirkt der Extracurrent, dass der Strom nicht gleich mit voller Kraft eintritt. Die Gegenwirkung ist merklich, so dass man Messungen über das Wachsen der Stromstärke anstellen kann. Helmholtz hat dies in einer hübschen Abhandlung, Pogg. Ann. 83, weiter entwickelt.

C. Webers allgemeines elektrisches Grundgesetz.

§. 111.

Ableitung des Ampèreschen Gesetzes aus dem Weberschen Grundgesetz.

Wilhelm Weber*) hat ein allgemeines Grundgesetz aufgestellt, nach welchem elektrische Massen auf einander wirken sollen, mögen dieselben sich in Ruhe befinden oder in Bewegung begriffen sein.

Die beiden elektrischen Massen seien e und η; befinden sich dieselben in Ruhe, und beträgt ihre Entfernung r, so üben sie auf einander die bewegende Kraft

$$\frac{fe\eta}{r^2}$$

in der Richtung der Verbindungslinie aus. f bedeutet eine Constante. Wir können diese Constante immer gleich 1 setzen, indem wir die Einheiten von e und η dem entsprechend festsetzen. Es findet Abstossung oder Anziehung statt, je nachdem die Massen e und η gleich-

*) Wilhelm Weber: Elektrodynamische Maassbestimmungen. (Erste Abhandlung, insbesondere über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkungen.) Abhandlungen bei Begründung der k. sächs. Ges. der Wissenschaften. 1846. — Zweite Abhandlung, insbesondere Widerstandsmessungen. Abschnitt VI. Abhandlungen der k. sächs. Ges. d. W., I, 1852.

namig oder ungleichnamig sind. Demnach wird in der Richtung der Verbindungslinie r die Kraft ausgeübt

$$\frac{e\eta}{r^2},$$

positiv gerechnet, wenn sie die Entfernung r zu vergrössern strebt.

Dieses elektrostatische Gesetz kann auf elektrodynamische Erscheinungen keine Anwendung finden, so lange wir an der Ansicht festhalten, dass bei jeder elektrischen Strömung durch einen Querschnitt ebensoviel positive Elektricität in der einen, wie negative Elektricität in der entgegengesetzten Richtung hindurchströmt; denn wir erhielten keine Wirkung zwischen Stromelementen, weil dieselben ebensoviel positive, wie negative Elektricität enthalten sollen. Weber hat hieraus geschlossen, dass das Gesetz für die Wirkung der Elektricität einer Ergänzung bedürfe, welche wesentlich von der Bewegung der Theilchen gegen einander, nämlich von der relativen Geschwindigkeit und von der relativen Beschleunigung der Theilchen abhange, und zwar fand er für die Wirkung den folgenden Ausdruck:

$$(1) \qquad \frac{e\eta}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\},$$

wo c eine Constante bedeutet. Die Einheiten von e und η sind so bestimmt angenommen, dass für den Fall der Ruhe, wo $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d^2r}{dt^2}$ null sind, das oben genannte elektrostatische Gesetz mit $f = 1$ gilt.

Die Giltigkeit des Gesetzes kann nur an der Erfahrung geprüft werden. Der Erfolg ist sehr glänzend. Einmal folgt aus dem Gesetz sehr einfach das Ampèresche Gesetz für die Wirkung zwischen Stromelementen, dann aber auch das allgemeine Inductionsgesetz, wie wir dasselbe aufgestellt haben. Wohl schwerlich wird dieses Webersche Gesetz das letzte und einfachste sein, auf welches die Erscheinungen können zurückgeführt werden; es bleibt ein grosses Problem, das Gesetz aus der Bewegung abzuleiten.

Das Ampèresche Gesetz folgt sehr einfach aus dem Weberschen. Wir betrachten zunächst zwei besondere Fälle.

Die beiden Stromelemente sollen in einer Geraden liegen. Die Elemente seien ds und $d\sigma$, ihre Entfernung r, die positiven Elektricitäten, welche in den Längeneinheiten der beiden Ströme fliessen, e und η, die Geschwindigkeiten derselben u und u_1. Bezeichnen wir die Entfernungen der Theilchen $\mp eds$ und $\mp \eta d\sigma$ mit $(\mp e, \mp \eta)$, welche vier Entfernungen wir wegen ihrer ungleichen Abgeleiteten nach der Zeit unterscheiden müssen, so ist

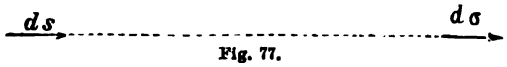


Fig. 77.

$$(+e, +\eta) = r + (u_1 - u)t,$$
$$(+e, -\eta) = r - (u_1 + u)t,$$
$$(-e, +\eta) = r + (u_1 + u)t,$$
$$(-e, -\eta) = r - (u_1 - u)t.$$

Hieraus ergeben sich zwischen den vier Elektricitäten die vier Wirkungen:

$$W_{+e,+\eta} = \frac{e\eta}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}(u_1 - u)^2\right\},$$
$$W_{+e,-\eta} = -\frac{e\eta}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}(u_1 + u)^2\right\},$$
$$W_{-e,+\eta} = -\frac{e\eta}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}(u_1 + u)^2\right\},$$
$$W_{-e,-\eta} = \frac{e\eta}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}(u_1 - u)^2\right\}.$$

Nach Weber werden diese Kräfte, welche zunächst die elektrischen Flüssigkeiten angreifen, auf die ponderabeln Träger übertragen, und die Kraft, womit die beiden Stromelemente auf einander wirken, ist gleich der Summe der vier Wirkungen:

$$W' = \frac{8e\eta}{c^2 r^2} u u_1 \, ds \, d\sigma.$$

Wir betrachten zweitens den Fall, wo die beiden Elemente auf ihrer Verbindungslinie senkrecht stehen und einander parallel sind.

Fig. 78.

Wir haben hier

$$(+e, +\eta)^2 = r^2 + (u_1 - u)^2 t^2,$$
$$(+e, -\eta)^2 = r^2 + (u_1 + u)^2 t^2,$$
$$(-e, +\eta)^2 = r^2 + (u_1 + u)^2 t^2,$$
$$(-e, -\eta)^2 = r^2 + (u_1 - u)^2 t^2.$$

Folglich ist die relative Geschwindigkeit in allen vier Fällen gleich null, $\frac{dr}{dt} = 0$; dagegen hat nun die relative Beschleunigung $\frac{d^2r}{dt^2}$ einen von null verschiedenen Werth, und die Summe der vier Wirkungen ist:

$$W'' = -\frac{16e\eta}{c^2 r^2} u u_1 \, ds \, d\sigma.$$

Wir vergleichen die Werthe von W' und W'' mit denen, welche aus dem Ampèreschen Gesetz für die Wirkung folgen. Nach Ampère findet im erstern Fall Abstossung, im letztern Anziehung statt; damit steht das positive Vorzeichen von W' und das negative von W'' in Einklang. Ferner sind die Stromstärken j in ds und j_1 in $d\sigma$ den Bewegungsgrössen eu und ηu_1 proportional. Da endlich die Wirkungen nach Ampère sind:

$$W' = \frac{jj_1 ds d\sigma}{2r^2} \quad \text{und} \quad W'' = -\frac{jj_1 ds d\sigma}{r^2},$$

erhalten wir völlige Uebereinstimmung, wenn wir setzen:

$$(2) \qquad j = \frac{4eu}{c}, \qquad j_1 = \frac{4\eta u_1}{c}.$$

Wir berechnen nun für den allgemeinen Fall die Wirkung zweier Stromelemente auf einander nach dem Weberschen Gesetz. Die Wirkung zwischen den beiden Elektricitäten eds und $\eta d\sigma$ ist

$$W_{e,\eta} = \frac{e\eta}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{d(e,\eta)}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2(e,\eta)}{dt^2}\right]\right\} ds d\sigma.$$

Folglich wird die Gesammtwirkung

$$W = -\frac{e\eta}{c^2 r^2}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d(e,\eta)}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d(e,-\eta)}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d(-e,\eta)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(-e,-\eta)}{dt}\right)^2 \\ -2r\left[\frac{d^2(e,\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(e,-\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(-e,\eta)}{dt^2} + \frac{d^2(-e,-\eta)}{dt^2}\right]\end{array}\right\} ds\, d\sigma.$$

Bezeichnen wir aber mit ds und $d\sigma$ die positiven Richtungen der Strömung in den beiden Elementen, so haben wir

$$\frac{d(e,\eta)}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt},$$

$$\frac{d(e,-\eta)}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} - \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt},$$

$$\frac{d(-e,\eta)}{dt} = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt},$$

$$\frac{d(-e,-\eta)}{dt} = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} - \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Folglich wird der erste Ausdruck in der Klammer

$$8\,\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Wir erhalten weiter

$$\frac{d^2(e,\eta)}{dt^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \sigma}\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2},$$

und die drei andern Ausdrücke, indem wir die Vorzeichen von $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{d^2 s}{dt^2}$, dann von $\frac{d\sigma}{dt}$ und $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$, endlich von den vier Grössen zusammen umkehren; somit folgt als Werth des Ausdrucks in der zweiten Klammer

$$8\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \sigma}\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Die Wirkung der beiden Stromelemente auf einander ist also nach dem Weberschen Gesetz

$$(3) \qquad W = \frac{16\, e\eta ds d\sigma}{c^2 r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Setzen wir aber nach (2)

$$j = \frac{4e}{c}\frac{ds}{dt}, \qquad j_1 = \frac{4\eta}{c}\frac{d\sigma}{dt},$$

so ergiebt sich

$$W = \frac{jj_1\,ds\,d\sigma}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right),$$

und dies ist der analytische Ausdruck des Ampèreschen Gesetzes (vgl. S. 102).

§. 112.

Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem Weberschen Grundgesetz.

Wir suchen nun auch das Inductionsgesetz aus dem Weberschen Gesetz abzuleiten.

Es werde ein Strom bewegt in der Nähe eines geschlossenen Leiters, welcher ebenfalls in Bewegung begriffen sei. Wir berechnen die Wirkungen, welche die Elektricitäten des Stromes auf die elektrischen Theilchen $+eds$ und $-eds$ in dem Leiterelement ds ausüben. Sind diese Kräfte nicht gleich und gleich gerichtet, so streben sie eine relative Bewegung der Theilchen gegen einander an, und zwar ist die Scheidungskraft gleich der Differenz der Wirkungen auf die elektrischen Theilchen $+eds$ und $-eds$. Aber eine Bewegung der Elektricität kann nur in der Richtung des Leiters stattfinden, und in Folge davon kommen nur die Componenten der Wirkungen nach der Richtung des Leiterelementes in Betracht. So erhalten wir, bei Benutzung der oben eingeführten Bezeichnung, für die durch das Stromelement $d\sigma$ in dem Leiterelement ds inducirte elektromotorische Kraft den Ausdruck:

$$(W_{e,\eta} + W_{e,-\eta} - W_{-e,\eta} - W_{-e,-\eta})\cos(r, ds).$$

Nun ist

$$\cos(r, ds) = \frac{\partial r}{\partial s},$$

und durch Einsetzen der Werthe von $W_{\pm e,\pm\eta}$ erhält der Ausdruck die Form:

$$-\frac{e\eta\,ds\,d\sigma}{c^2r^2}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d(e,\eta)}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d(e,-\eta)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(-e,\eta)}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d(-e,-\eta)}{dt}\right)^2 \\ -2r\left[\frac{d^2(e,\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(e,-\eta)}{dt^2} + \frac{d^2(-e,\eta)}{dt^2} - \frac{d^2(-e,-\eta)}{dt^2}\right]\end{array}\right\}\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Wir wollen gleich annehmen, der Inducent und der Leiter seien in Bewegung, und in beiden fliesse ein elektrischer Strom von veränderlicher Stärke; wir werden dann finden, dass der Strom in dem Leiter s ohne Einfluss auf die Induction in diesem Leiter selbst ist. Wir haben

$$\frac{d(e,\eta)}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial r}{\partial o}\frac{do}{dt} + \frac{\partial r}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dt},$$

wo, gerade wie oben, do und $d\omega$ die Bewegungen des Leiterelementes

ds und des Stromelementes $d\sigma$ bedeuten. Wir erhalten ferner die Werthe von

$$\frac{d(e,-\eta)}{dt}, \qquad \frac{d(-e,\eta)}{dt}, \qquad \frac{d(-e,-\eta)}{dt},$$

indem wir statt $\frac{d\sigma}{dt}$ $-\frac{d\sigma}{dt}$, dann statt $\frac{ds}{dt}$ $-\frac{ds}{dt}$, endlich statt beider Werthe die entgegengesetzten schreiben. Demnach wird das erste Glied unter der Klammer gleich

$$8\,\frac{\partial r}{\partial \sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial t}\left(\frac{\partial r}{\partial o}\,\frac{do}{dt}+\frac{\partial r}{\partial \omega}\,\frac{d\omega}{dt}\right).$$

Durch weitere Differentiation ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(e,\eta)}{dt^2} = &\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\,\frac{ds}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \sigma}\,\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial o}\,\frac{do}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \omega}\,\frac{d\omega}{dt}\right\}\frac{ds}{dt}\\
&+\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \sigma}\,\frac{ds}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma^2}\,\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma\,\partial o}\,\frac{do}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma\,\partial \omega}\,\frac{d\omega}{dt}\right\}\frac{d\sigma}{dt}\\
&+\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial o}\,\frac{ds}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma\,\partial o}\,\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial o^2}\,\frac{do}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial o\,\partial \omega}\,\frac{d\omega}{dt}\right\}\frac{do}{dt}\\
&+\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial \omega}\,\frac{ds}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma\,\partial \omega}\,\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial o\,\partial \omega}\,\frac{do}{dt}+\frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2}\,\frac{d\omega}{dt}\right\}\frac{d\omega}{dt}\\
&+\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{d^2 s}{dt^2}+\frac{\partial r}{\partial \sigma}\,\frac{d^2\sigma}{dt^2}+\frac{\partial r}{\partial o}\,\frac{d^2 o}{dt^2}+\frac{\partial r}{\partial \omega}\,\frac{d^2\omega}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Werthe der drei andern Beschleunigungen, indem wir die Vorzeichen einmal von $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{d^2 s}{dt^2}$, dann von $\frac{d\sigma}{dt}$ und $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$, endlich von allen vier Grössen umkehren. Folglich wird der Ausdruck unter der zweiten Klammer

$$8\,\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma\,\partial o}\,\frac{d\sigma}{dt}\,\frac{do}{dt}+8\,\frac{d^2 r}{\partial \sigma\,\partial \omega}\,\frac{d\sigma}{dt}\,\frac{d\omega}{dt}+4\,\frac{\partial r}{\partial \sigma}\,\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

alle andern Glieder heben sich fort. Demnach erhalten wir für die in dem Leiterelement ds durch das Stromelement $d\sigma$ inducirte elektromotorische Kraft den Werth:

(4)
$$E_1\,ds\,d\sigma = \frac{16\,e\eta\,ds\,d\sigma}{c^2 r^2}\times$$
$$\times\left\{\left[\left(r\,\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\partial o}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,\frac{\partial r}{\partial o}\right)\frac{do}{dt}+\left(r\,\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\partial\omega}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)\frac{d\omega}{dt}\right]\frac{d\sigma}{dt}\,\frac{\partial r}{\partial s}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,r\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right\}.$$

Ist nun j die Stromstärke des Inducenten, so haben wir nach den Gleichungen (2)

$$j=\frac{4\eta}{c}\,\frac{d\sigma}{dt}, \qquad \frac{dj}{dt}=\frac{4\eta}{c}\,\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

folglich wird die inducirte elektromotorische Kraft E_1, bezogen auf die Längeneinheit des Inducenten und des Leiters,

$$(5)\quad E_1 = \frac{\varepsilon j}{r^2}\left\{\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\partial o} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial o}\right)\frac{do}{dt} + \left(r\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\partial\omega} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)\frac{d\omega}{dt}\right\}\frac{\partial r}{\partial s} + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{dj}{dt}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s},$$

wo gesetzt ist

$$\varepsilon = \frac{4e}{c}.$$

Wir sehen, dass E_1 von der Strömung in dem Leiter s unabhängig ist.

§. 113.

Untersuchung der Uebereinstimmung mit dem früher gefundenen Potentialsatz.

Wir müssen schliesslich noch untersuchen, ob die aus diesem Elementargesetz für die inducirte elektromotorische Kraft folgenden Resultate mit dem übereinstimmen, was wir früher direct aus der Erfahrung abgeleitet haben.

Bei Benutzung der oben gebrauchten Zeichen ist die in dem ganzen Leiter s zur Zeit t inducirte elektromotorische Kraft

$$E = S\Sigma E_1 d\sigma ds,$$

und demnach der Differentialstrom

$$D = \frac{Edt}{W} = \frac{1}{W} S\Sigma E_1 d\sigma\, ds\, dt,$$

wo W den Widerstand des geschlossenen Leiters s bedeutet.

Wir nehmen zuerst an, der Leiter sowohl, wie der Inducent seien in Ruhe, und die Induction rühre bloss von der Aenderung der Stromstärke j her; dann wird

$$E_1 = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{dj}{dt}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s},$$

folglich

$$D = \frac{\varepsilon dj}{W}\frac{1}{2} S\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s} d\sigma\, ds.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2} S\Sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s} d\sigma\, ds = P_{\sigma,s},$$

und demnach wird

$$(6)\qquad D = \frac{\varepsilon}{W} P_{\sigma,s}\, dj,$$

ein Resultat, das mit der S. 294 aufgestellten Gleichung (13) völlig übereinstimmt.

So weit stehen also die Folgerungen aus dem Weberschen Gesetz in Einklang mit der Erfahrung, und wir brauchen die durch Intensitätsänderung erzeugte Induction nicht mehr zu betrachten; wir setzen

$$\frac{dj}{dt} = 0.$$

Ferner werde zunächst bloss der Leiter s bewegt; es sei also auch $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Dann wird

$$D = \frac{\varepsilon j}{W} \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial o} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \frac{\partial r}{\partial o} \right) \frac{\partial r}{\partial s}\, do\, d\sigma\, ds,$$

und daraus folgt der Integralstrom

$$(7) \qquad J = \frac{\varepsilon j}{W} \int \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial o} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \frac{\partial r}{\partial o} \right) \frac{\partial r}{\partial s}\, d\sigma\, ds\, do.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem S. 274 abgeleiteten Ausdruck (5), so haben wir einmal das entgegengesetzte Vorzeichen, und dann sind das Leiterelement ds und das Wegelement do mit einander vertauscht; S. 275 aber ist gefunden, dass der Werth derselbe ist; denn die Bedingung, dass der Inducent ruhe und geschlossen sei, ist erfüllt. Mithin stimmt auch in diesem Falle der aus dem Weberschen Gesetz abgeleitete Werth mit der Erfahrung überein.

Anders verhält es sich aber, wenn wir den Strom in Bewegung annehmen. Der Einfachheit wegen sei nun $do = 0$, und dann folgt der Integralstrom

$$(8) \qquad J_1 = \frac{\varepsilon j}{W} \int \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\omega} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \frac{\partial r}{\partial\omega} \right) \frac{\partial r}{\partial s}\, d\sigma\, ds\, d\omega.$$

Wir können (vergl. S. 275 ff.) das dreifache Integral durch ein Aggregat von Doppelintegralen ausdrücken, und zwar erhalten wir, da der Leiter s ruht und geschlossen ist,

$$\int \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\omega} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \frac{\partial r}{\partial\omega} \right) \frac{\partial r}{\partial s}\, d\sigma\, ds\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int \mathrm{S} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial\omega} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\, d\omega + \frac{1}{2} \mathrm{S} \Sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \right]_{\omega_1}^{\omega_2} d\sigma\, ds;$$

folglich wird

$$J_1 = \frac{\varepsilon j}{W} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{S} \Sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \frac{\partial r}{\partial s} \right]_{\omega_1}^{\omega_2} d\sigma\, ds + \frac{1}{2} \int \mathrm{S} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial\omega} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\, d\omega \right\}.$$

Dagegen haben wir oben gefunden (S. 289), dass, wenn der Leiter ruht und der Inducent bewegt wird, der Integralstrom den Werth erhält

$$J = -\frac{\varepsilon j}{W} \int \mathrm{S} \Sigma \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \right) \frac{\partial r}{\partial\omega}\, d\sigma\, ds\, d\omega,$$

oder

$$J = \frac{\varepsilon j}{W} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{S} \Sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial\sigma} \frac{\partial r}{\partial s} \right]_{\omega_1}^{\omega_2} d\sigma\, ds - \frac{1}{2} \int \mathrm{S} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial\omega} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\, d\omega \right\}.$$

Mit diesem Werthe stimmt der oben gefundene und mit J_1 bezeichnete im Allgemeinen nicht überein; denn die zweiten Glieder haben das entgegengesetzte Vorzeichen.

Nur wenn das zweite Doppelintegral verschwindet, sind die Werthe J und J_1 einander gleich, und das trifft immer zu, wenn der Inducent sich bewegt, ohne dass Gleitstellen vorhanden sind. Dann müssen nämlich die Werthe von r, $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial r}{\partial \omega}$ für die Grenzen σ_1 und σ_2 zusammenfallen. Wir finden also, dass auch in dem Falle, wo die Induction durch Bewegung des Inducenten erzeugt wird, der aus dem Weberschen Gesetz berechnete Werth für den Integralstrom mit der Erfahrung übereinstimmt; nur dürfen bei Bewegung des Inducenten keine Gleitstellen zur Anwendung kommen; mit andern Worten: die Zahl der Stromelemente darf keine Aenderung erleiden.

Wenn wir dagegen die Bewegung des Inducenten so einrichten, dass die Werthe von r, $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial r}{\partial \sigma}$ für ω_1 und für ω_2, d. h. die Werthe am Anfang und am Ende der Bewegung dieselben sind, so verschwindet das erste Doppelintegral, und dann wird der aus dem Weberschen Gesetz berechnete Werth

$$J_1 = \frac{\varepsilon j}{W} \frac{1}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathrm{S}\left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \omega}\right] ds\, d\omega, \tag{9}$$

während wir früher den gerade entgegengesetzten Werth erhalten haben,

$$J = -\frac{\varepsilon j}{W} \frac{1}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathrm{S}\left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \omega}\right] ds\, d\omega. \tag{10}$$

Die inducirten Ströme werden also nach beiden Formeln gleich stark; aber sie haben entgegengesetzte Richtung.

§. 114.

Ergebniss der Beobachtung.

Zunächst wird fraglich erscheinen, welche der beiden Formeln mit der Erfahrung übereinstimme, und der eben betrachtete Fall ist zu einer solchen Prüfung sehr geeignet, weil es nur darauf ankommt, die Richtung des inducirten Stromes zu beobachten, eine Messung aber weiter nicht erforderlich ist. Die Beobachtung hat ergeben, dass das negative Vorzeichen gilt; der aus dem Weberschen Gesetz berechnete Werth ist also nicht richtig; Weber selbst hat sich davon überzeugt.

Der Versuch kann etwa folgendermaassen angestellt werden:

Ein bei A durchbrochener Metallring ACB wird horizontal aufgestellt und von einem andern Metallring acb umgeben, dessen Enden a und b mit den Enden eines Galvanometers verbunden sind. Eine verticale Axe geht durch den Mittelpunkt der Ringe und trägt eine Metallschiene L, welche gegen den Ring ACB federt. In A wird der Strom eingeleitet; er geht durch den Ring ACB nach der Schiene $\beta L \gamma$ und

durch die Axe nach der galvanischen Batterie zurück. Drehen wir die Axe, so dass die Schiene von A über C nach B geht, dann wird in dem Ring acb ein Strom inducirt, und da die Endlage der Schiene in B mit ihrer Anfangslage in A fast zusammenfällt, haben wir sehr nahe den Fall, wo das erste von den beiden Doppelintegralen verschwindet. Man kann ferner die Verbindungsdrähte mit der Batterie und mit dem Galvanometer so legen, dass bloss die beiden Kreisringe ACB und acb inducirend auf einander wirken. Die Berechnung des Integralstromes J ist dann möglichst einfach; man schliesst aber ohne alle Rechnung aus der Definition

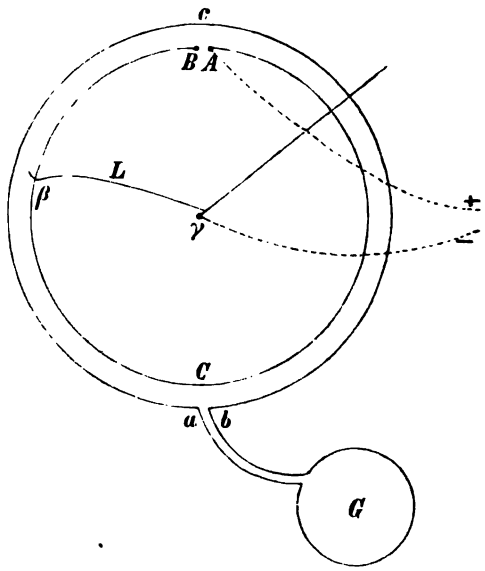


Fig. 79.

$$P_{\sigma,s} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\sum\frac{\cos(ds,d\sigma)}{r}\,d\sigma\,ds,$$

dass das Potential des einen Kreises auf den andern einen negativen Werth besitzt.

Wir haben in dem vorliegenden Falle nur eine Gleitstelle, und zwar eine Gleitstelle von der Art σ_1, da in β der Strom in das bewegte Stück eintritt; ferner wird

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}\mathrm{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]ds\,d\omega = P,$$

wenn P das Potential des Kreises ACB auf den Kreis acb bezeichnet. Mithin ergiebt sich

$$J_1 = -\frac{\varepsilon j}{W}P,$$

dagegen

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}P.$$

Da P negativ ist, wird der Integralstrom durch J_1 oder durch J dargestellt, je nachdem der inducirte Strom die positive oder die negative Richtung hat.

Nun fliesst der Strom in negativer Richtung. Man erkennt dies am Sichersten, indem man durch eine etwas andere Anordnung des Versuchs eine constante Ablenkung der Multiplicatornadel erzielt. Versetzt man die Drehungsaxe in rasche gleichförmige Rotation, und trifft

man die Einrichtung, dass beim Uebersprungen der Feder von B nach A der Leiter acb geöffnet wird, so erhält man einen inducirten Strom von nahe constanter Stärke, welcher eine deutlich beobachtbare Ablenkung der Nadel erzielt, und wenn die Axe in positivem Sinne gedreht wird, so zeigt die Ablenkung einen Strom von negativer Richtung in dem Leiter acb an. Bleibt dagegen der Leiter acb immer geschlossen, so erleidet die Nadel gar keine Ablenkung. Dies ist folgendermaassen zu erklären. Durch Drehung der Feder von A über C bis B wird der Kreisstrom ACB erzeugt; dieser Strom verschwindet aber in dem Moment, wo die Feder von B nach A überspringt, indem die Leitung hiebei geöffnet wird; die beiden Wirkungen müssen sich bei fortgesetzter Drehung gerade aufheben, so dass die mittlere Intensität des inducirten Stromes null ist. Die zweite Wirkung wird dagegen fortfallen, wenn der Leiter acb in dem Moment, wo die Feder überspringt, nicht geschlossen ist.

Die Erfahrung lehrt somit, dass in dem betrachteten Fall der aus dem Weberschen Gesetz berechnete Werth nicht richtig ist. Das Gesetz hat nun in so vielen und sehr verschiedenartigen andern Fällen zu Resultaten geführt, welche mit der Erfahrung in völligem Einklang stehen, dass wir vermuthen müssen, das Gesetz gelte auch in dem vorliegenden Falle, aber dasselbe sei oben nicht richtig zur Anwendung gebracht worden. Da der Widerspruch nur auftritt, wenn der Inducent Gleitstellen besitzt, müssen die Bewegungen der Elektricitäten an einer solchen Gleitstelle nicht richtig aufgefasst sein, und es ist Weber wirklich gelungen die Schwierigkeit in sehr glücklicher Weise zu lösen.

§. 115.

Betrachtung einer Gleitstelle des Inducenten.

Zweierlei ist in der oben angestellten Rechnung übersehen. Das Stromstück AB gleite auf der ruhenden Schiene CDE aus der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2. Vergleichen wir in dem einfachen Falle, wo $A_1B_1 = A_2B_2$, den Anfangszustand und den Endzustand. Am Anfang haben wir den Strom $A_1B_1DA_1$, am Ende den Strom $A_2B_2B_1DA_1A_2$; die Stromstärke soll dieselbe sein. Folglich müssen bestimmte Mengen von Elektricität, welche am Anfang in Ruhe waren, am Ende in Bewegung begriffen sein, nämlich die Mengen, welche in

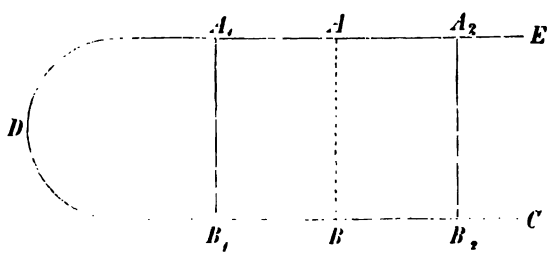


Fig. 80.

den Stromstücken A_1A_2 und B_2B_1 fliessen. Das ist bei Berechnung der Wirkung nach dem Weberschen Gesetz nicht beachtet.

Aber noch ein zweiter Punkt ist übersehen. In dem constanten Strom fliesse die positive Elektricität mit der Geschwindigkeit u; das Leiterstück AB werde in der Richtung A_1A_2 mit der Geschwindigkeit v bewegt. Dann wird ein Theilchen positiver Elektricität vor dem Eintritt in das bewegte Stück durch die Gleitstelle A die Geschwindigkeit u haben, nach dem Eintritt die Geschwindigkeit $u + v$; folglich hat das Theilchen beim Eintritt plötzlich den Geschwindigkeitszuwachs v erhalten. Umgekehrt wird ein Theilchen negativer Elektricität vor dem Austritt aus dem bewegten Stück die Geschwindigkeit $u - v$ in der Richtung A_2A_1 haben, nach dem Austritt die Geschwindigkeit u, was denselben Zuwachs an Strömungsgeschwindigkeit ausmacht. Auch diese plötzlichen Aenderungen in den Geschwindigkeiten der Elektricitätstheilchen sind bei Berechnung der Wirkung aus dem Weberschen Gesetz unberücksichtigt geblieben.

Wir wollen noch in aller Kürze zeigen, wie man bei Berücksichtigung der beiden Punkte aus dem Weberschen Gesetz den richtigen Werth für den inducirten Strom berechnen kann. Wir betrachten eine Gleitstelle A, wo der Strom aus der ruhenden Schiene DE in das bewegte Stück AB eintritt, und berechnen den Zuwachs, welchen der Integralstrom in Folge der genannten beiden Vorgänge an der Gleitstelle inhalb der unendlich kleinen Zeit dt erfährt. Das bewegte Stück AB gehe in der Zeit dt nach $A'B'$. Dann kommt erstens das Stromelement AA' neu hinzu. Den dadurch in dem Leiter s inducirten Strom können wir folgendermaassen finden.

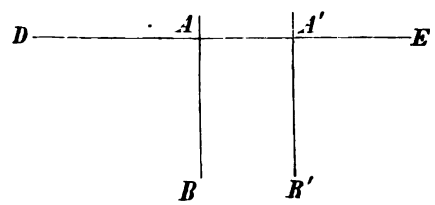


Fig. 81.

Nach der oben angestellten Rechnung wird dadurch, dass in dem Stromelement $d\sigma$ die Intensität um dj vermehrt wird, in dem Leiter s ein Differentialstrom von der Stärke

$$\frac{\varepsilon\, dj\, d\sigma}{W} \frac{1}{2} \mathrm{S} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\, ds$$

erzeugt (vgl. die S. 301 angestellte Rechnung). In unserm Fall ist die Aenderung der Stromstärke endlich, j statt dj; ferner ist das Stromelement $d\sigma$ gleich dem Wegelement $AA' = d\omega$ der Gleitstelle. Folglich kommt in der Zeit dt erstens zu dem Integralstrom hinzu:

$$\frac{\varepsilon j}{W} \frac{1}{2} \mathrm{S} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \omega}\, ds . d\omega .$$

Da zweitens in dem bewegten Stück AB der Strom mit der Ge-

schwindigkeit u fliessen soll, muss innerhalb der Zeit dt die Menge $\eta u dt$ positiver Elektricität aus der ruhenden Schiene DE in das bewegte Stück eintreten; diese Menge, welche in der Richtung $d\omega$ eintretend anzunehmen ist, erhält den Geschwindigkeitszuwachs v. Dem entsprechend muss die Menge $-\eta u dt$ negativer Elektricität in der entgegengesetzten Richtung aus dem bewegten Stück austreten, und beim Austritt verwandelt sich deren Geschwindigkeit von $u - v$ in u; wir finden also, dass die Mengen $\pm \eta u dt$ positiver und negativer Elektricität, welche in der Richtung $\pm d\omega$ strömen, den Geschwindigkeitszuwachs v erhalten. Das entspricht dem Entstehen eines Stromelementes

$$j' d\sigma' = \frac{4}{c} \eta v . u dt,$$

indem $d\sigma' = u dt$, $j' = \frac{4}{c} \eta v$. Nun ist aber

$$j = \frac{4}{c} \eta u \quad \text{und} \quad d\omega = v dt,$$

folglich

$$j' d\sigma' = j d\omega.$$

Mithin wird bei der Bewegung der Gleitstelle noch einmal genau derselbe inducirende Einfluss ausgeübt, so dass der Integralstrom während der Zeit dt den doppelten Zuwachs erhält:

$$\frac{\varepsilon j}{W} \mathrm{S} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \omega} ds . d\omega.$$

Wird also die Induction durch eine Bewegung des Inducenten mit Gleitstellen erzeugt, während die Stromstärke unverändert bleibt und der Leiter ruht, so tritt zu dem Differentialstrom an einer Gleitstelle A, wo der Strom in das bewegte Stück eintritt, das Glied hinzu

$$\frac{\varepsilon j}{W} \mathrm{S} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \omega} ds . d\omega,$$

an einer Gleitstelle B, wo der Strom aus dem bewegten Stücke austritt, ein ganz ähnliches Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen. Betrachten wir wieder den Fall von zwei Gleitstellen, den Werthen σ_1 und σ_2 von σ entsprechend, die erstere von der Art A, die letztere von der Art B, so wird der Differentialstrom

$$D = \frac{\varepsilon j}{W} \mathrm{S} \sum \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \omega} - \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial \omega} \right) \frac{\partial r}{\partial s} d\sigma \, ds \, d\omega -$$

$$- \frac{\varepsilon j}{W} \mathrm{S} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \omega} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds \, d\omega,$$

und hieraus folgt der Integralstrom

$$(11)\qquad J = \frac{\varepsilon j}{W}\left\{\begin{array}{l}\int \mathrm{S}\,\Sigma\,\frac{1}{r^2}\left(r\,\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\omega} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)\frac{\partial r}{\partial s}\,d\sigma\,ds\,d\omega \\ -\int \mathrm{S}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\,d\omega\end{array}\right\}.$$

Drücken wir endlich das dreifache Integral durch Doppelintegrale aus, so folgt

$$J = \frac{\varepsilon j}{W}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\Sigma\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right]_{\omega_1}^{\omega_2} d\sigma\,ds - \frac{1}{2}\int \mathrm{S}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\,d\omega\right\},$$

und das ist genau der Werth, welcher aus dem Potentialgesetz für den Integralstrom unmittelbar folgt. Wir haben damit dieses Potentialgesetz aus dem Weberschen elektrischen Grundgesetz allgemein abgeleitet. Wir sehen ferner an dem zuletzt betrachteten Fall, dass, wenn es sich darum handelt den inducirten Strom zu berechnen, das Potentialgesetz unmittelbar den einfachsten Ausdruck liefert, während bei Anwendung des Weberschen Gesetzes besondere Umstände zu berücksichtigen sind, welche die Rechnung erschweren.

JUN 25 1954